Pro Mathematica Vol. XIV, Nos. 27-28, 2000

ESPACIOS α-SEMI T_i PARA $i = 0, 1/2, 1, 2$

E. ***Rosas****, J.* ***Vielma****, C.****Carpintero*** *y M.* ***Salas***

Resumen

En este artículo, estudiamos la α semi separación de los espacios topológicos en los niveles 0, 1/2, 1 y 2. Y caracterizamos estos espacios en términos de sus conjuntos unitarios.

Palabras Claves: α semi abierto, α semi cerrado, α semi clausura generalizada.

1. Introducción

Los conjuntos semi abiertos fueron introducidos por N. Levine en 1963 y en 1979, S. Kasahara, estudia los conjuntos α-abiertos. En la misma perspectiva, C. Carpintero, E. Rosas y J. Vielma introducen, en 1998, la noción de conjuntos α-semi abiertos como una generalización de los conjuntos semi-abiertos. En este trabajo se introducen y se estudian nuevos axiomas de separación llamados espacios α-semi-T_i para $i = 0$, 1/2, 1, 2 y se

✉ *Universidades de los Andes y Oriente, Venezuela.*

estudian las relaciones entre éstos. En el caso que el operador α considerado sea monótono, caracterizamos cada uno de estos espacios en términos de sus conjuntos unitarios. Para tal fin necesitamos introducir en primer término, cierta terminología y algunos resultados básicos los cuales se exponen a continuación.

Definición 1. *Sea (X, Γ) un espacio topológico. Una función α: $P(X) \to P(X)$ donde $P(X)$ denota el conjunto de partes de X, se dice que es un operador asociado a una topología Γ sobre X, si se cumple que para todo $U \in \Gamma$, $U \subseteq \alpha(U)$.*

Una tripleta (X, Γ, α) denotará en lo sucesivo que α: $P(X) \to P(X)$ es un operador asociado a la topología Γ sobre el espacio X. A^c denotará el complemento de A en X.

Ejemplo 1. *Sea, (X, Γ) un espacio topológico cualquiera y definamos α, β, γ: $P(X) \to P(X)$ según las fórmulas:*

$$\alpha(A) = cl(A); \ \beta(A) = X - Fr(A); \ \gamma(A) = A;$$

cualquiera sea $A \subseteq X$, donde $cl(A)$ y $Fr(A)$ denotan la clausura y frontera topológica de A, respectivamente. α, β, γ son operadores asociados a Γ en el sentido de la definición anterior, α y γ son denominados operador clausura y operador identidad respectivamente.

Definición 2. *Sea (X, Γ, α). Un subconjunto A de X se dice α-semi abierto si existe un conjunto abierto $U \in \Gamma$ tal que $U \subset A \subset \alpha(U)$. El complemento de un conjunto α-semi abierto es llamado α-semi cerrado.*

La familia de todos los conjuntos α-semi abiertos (resp. α-semi cerrados) de X se denotará por $\alpha - SO(X)$ (resp. $\alpha - SC(X)$).

Observe que cuando α es el operador clausura descrito en el ejemplo 1, la definición anterior coincide con la definición de conjunto semi abierto dada por Levine en [1]. Además cuando el operador α es el operador identidad descrito en el ejempo 1, la definición de conjunto α-semi abierto coincide con la definición de conjunto abierto. Notemos también que dada cualquier tripleta (X, Γ, α) siempre ocurre que $\Gamma \subseteq \alpha - SO(X)$ y, en general, la familia $\alpha - SO(X)$ no es cerrada respecto a la unión de conjuntos. De manera similar, la familia $\alpha - SC(X)$ no es, en general, cerrada con respecto a la intersección de conjuntos.

Definición 3. *Sea (X, Γ, α). Un subconjunto A de X se dice α-abierto, si para cada $x \in A$ existe un conjunto abierto U tal que $x \in U$ y $\alpha(U) \subset A$.*

Observemos que dada una tripleta (X, Γ, α) tendremos que todo subconjunto A de X que sea α- abierto es abierto. El recíproco del aserto anterior es, en general, falso.

A continuación describiremos una clase de operadores cuyas características tienen importancia en este trabajo.

Definición 4. *Sea (X, Γ, α). α se dice un operador monótono si para cada par de conjuntos abiertos U, V de X tales que $U \subset V$, se tiene que $\alpha(U) \subseteq \alpha(V)$.*

Ejemplo 2. *De los operadores descritos en el ejemplo 1, el operador clausura y el operador identidad son obviamente monótonos, mientras que el operador β dado por $\beta(A) = X - Fr(A)$ no es monótono. Pues si $X = R$, donde R es la recta real con la topología usual, tendremos que $(0,1) \subset (0,2)$, pero $\beta((0,1))$ no está contenido en $\beta((0,2))$.*

Observe que dada la tripleta (X, Γ, α), con α un operador monótono, si $\{U_i\}_{i\in I}$ es una colección de conjuntos α semi abiertos de X, entonces para cada $i \in I$ existe un conjunto abierto V_i tal que $V_i \subseteq U_i \subseteq \alpha(V_i)$, luego usando la monotonía de α, obtenemos que

$$\cup_{i\in I} V_i \subseteq \cup_{i\in I} U_i \subseteq \cup_{i\in I} \alpha(V_i) \subseteq \alpha(\cup_{i\in I} V_i),$$

de donde se concluye que $\cup_{i\in I} U_i \in \alpha - SO(X)$.

Lo discutido en el párrafo anterior, permite introducir las nociones de α-semi interior y α-semi clausura que daremos a continuación.

Definición 5. *Sea (X, Γ, α), con α un operador monótono y A un subconjunto de X. La unión de todos los conjuntos α-semi abiertos de X que están contenidos en A se denomina el α-semi interior de A y se denota por $\alpha - SInt(A)$.*

Definición 6. *Sea (X, Γ, α), con α un operador monótono y A un subconjunto de X. La intersección de todos los conjuntos α- semi cerrados de X que contienen a A se denomina la α-semi clausura de A y se denota por $\alpha - SCl(A)$.*

Las nociones introducidas en las dos definiciones anteriores, constituyen generalizaciones de las nociones de interior y clausura usuales, además éstas conservan muchas de las propiedades de aquéllas. Así tendremos que para una tripleta $(X, \Gamma, \alpha,)$ con α un operador monótono, se tiene que si $A \subseteq B$ entonces $\alpha - SInt(A) \subseteq \alpha - SInt(B)$ (resp. $\alpha - SCl(A) \subseteq \alpha - SCl(B)$). Ademas, $A \in \alpha - SO(X)$ (resp. $A \in \alpha - SC(X)$) si y sólo si $A = \alpha - SInt(A)$ (resp. $A = \alpha - SCl(A)$).

Ahora introduciremos los espacios α-Semi-T_i y Espacios $\alpha - T_i$, para $i = 0, 1, 2$. Para ello es necesario dar las definiciones correspondientes.

Definición 7. *Sea (X, Γ, α). Decimos que (X, Γ) es un espacio α-semi-T_0 (resp. α-T_0) si para cada par de puntos distintos x, y en X, existe un conjunto α-semi abierto U (resp. un conjunto abierto U) tal que $x \in U$ y $y \notin U$ (resp. $x \in U$ y $y \notin \alpha(U)$) ó $y \in U$ y $x \notin U$ (resp. $y \in U$ y $x \notin \alpha(U)$).*

Definición 8. *Sea (X, Γ, α). Decimos que (X, Γ) es un espacio α-semi-T_1 (resp. α-T_1) si para cada par de puntos distintos x, y en X, existen conjuntos α-semi abiertos (resp. conjuntos abiertos) U, V en X conteniendo a x, y respectivamente, tales que $y \notin U$ y $x \notin V$, (resp. $x \notin \alpha(V)$ y $y \notin \alpha(U)$).*

Definición 9. *Sea (X, Γ, α). Decimos que (X, Γ) es un espacio α-semi-T_2 (resp. α-T_2) si para cada par de puntos distintos x, y en X, existen conjuntos α-semi abiertos (resp. conjuntos abiertos) U, V en X tales que $x \in U$, $y \in V$ y $\alpha(U) \cap \alpha(V) = \emptyset$.*

Observe que si en las definiciones anteriores, tomamos el operador α como el operador clausura, se obtienen en forma respectiva las definiciones de espacios semi-T_i para $i = 0,1$ y 2. En cambio si tomamos α como el operador identidad, obtenemos las definiciones usuales de espacios T_i para $i = 0,1$ y 2. Ademas, de las definiciones anteriores fácilmente se obtienen las siguientes relaciones entre los diversos axiomas de α-semi separación y α-separación.

$$\alpha\text{-}semi\ T_2 \leftarrow \alpha\text{-}T_2 \rightarrow T_2 \rightarrow semi\ T_2,\ para\ i = 0,1\ y\ 2.$$

Nota 1. *Seguidamente enunciaremos y demostraremos algunas propiedades y caracterizaciones relativas a los espacios que satisfacen las propiedades de α-semi separación y α-separación introducidas anteriormente cuando el operador α es monótono; así como también ilustramos con algunos ejemplos la necesidad de exigir tal propiedad al operador α para la validez de las proposiciones en cuestión.*

En el siguiente teorema se caracterizan los espacios α-semi T_0, cuando el operador α es monótono.

Teorema 1. *Sea* (X, Γ, α) *con* α *un operador monótono.* (X, Γ) *es un espacio* α*-semi* T_0 *si y sólo si para cada par de puntos* x, y *de* X *tales que* $x \neq y$, *ocurre que* $\alpha - sCl(\{x\}) \neq \alpha - sCl(\{y\})$.

Prueba. (*Suficiencia*) Supongamos que X es α-semi T_0, entonces para cualquier par de puntos x, y de X existe un conjunto α-semi abierto U tal que $x \in U$ y $y \notin U$ ó $y \in U$ y $x \notin U$; según esto, cualquiera sea el caso ocurre que $\alpha - sCl(\{x\}) \neq \alpha - sCl(\{y\})$.

(*Necesidad*). Si $\alpha - sCl(\{x\}) \neq \alpha - sCl(\{y\})$, existe un conjunto α-semi cerrado V tal que V contiene a x y no contiene a y, luego V^c es un conjunto α-semi abierto que contiene al punto y y no contiene al punto x. Por lo tanto, X es α-semi T_0.

El siguiente teorema nos da una relación entre los espacios α-semi T_1 y α-semi T_0.

Teorema 2. *Sea* (X, Γ, α). *Si* (X, Γ) *es* α*-semi-*T_1 *entonces* (X, Γ) *es* α*-semi-*T_0.

Prueba. Sigue directamente de las definiciones anteriores.

Ejemplo 3. *Sea* $X = \{a, b, c\}$ *y dotemos al conjunto* X *de las siguientes topologías*: $\Gamma = \{\emptyset\ \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$, $\Psi = \{\emptyset\ \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X\}$.

Definamos $\alpha, \beta: P(X) \to P(X)$ según las fórmulas:

$$\alpha(U) = (Fr(U))^c.$$

$$\beta(U) = \begin{cases} U & si\ b \in U \\ Cl(U) & si\ b \notin U \end{cases}.$$

cualquiera sea el subconjunto U de X. Observe que (X, Γ) no es T_0, pero si es α-semi T_0, mientras que (X, Ψ) es β-semi T_0, pero no es β-semi T_1.

En el siguiente teorema se caracterizan los espacios α-semi T_1, cuando el operador α es monótono, en función de sus subconjuntos unitarios.

Teorema 3. *Sea (X, Γ, α), con α un operador monótono. Si (X, Γ) es un espacio α-semi T_1, entonces cada conjunto unitario $\{x\}$, $x \in X$ es α-semi cerrado.*

Prueba. Si X es un espacio α-semi T_1 y $x \in X$, entonces cada $y \neq x$ tiene un conjunto α-semi abierto U_y disjunto de $\{x\}$, asi $X \setminus x\}$ es un conjunto α-semi abierto y en consecuencia, $\{x\}$ es α-semi cerrado.

Teorema 4. *Sea (X, Γ, α). Si cada subconjunto unitario de X α-semi cerrado, entonces cada subconjunto de X es la intersección de todos los conjuntos α-semi abiertos contenidos en éste.*

Prueba. Si $A \subset X$, entonces A es la intersección de todos los conjuntos de la forma $X \setminus \{x\}$ para $x \notin A$, por hipótesis cada uno de estos conjuntos son α-semi abiertos ya que cada conjunto unitario es α-semi cerrado.

Teorema 5. *Sea (X, Γ, α). Si cada subconjunto de X es la intersección de todos los conjuntos α-semi abiertos que lo contienen, entonces X es un espacio α-semi T_1.*

Prueba. Por hipótesis $\{x\}$ es la intersección de todos los conjuntos α-semi abiertos que lo contienen y por lo tanto, para cualquier $y \neq x$, existe un conjunto α-semi abierto que contiene a x y no a y, así X es un espacio α-semi T_1.

El siguiente corolario caracteriza los espacios α-semi T_1, cuando α es un operador monótono.

Corolario 1. *Sea (X, Γ, α), con α un operador monótono. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *X es un espacio α-semi-T_1.*
2. *Cada subconjunto unitario de X es α-semi cerrado.*
3. *Cada subconjunto de X es la intersección de subconjuntos α-semi abiertos de X que lo contienen.*

Observe que si α no es un operador monótono, entonces en el corolario anterior solamente son válidas $1 \mapsto 2 \mapsto 3$.

Ejemplo 4. Sea $X = \{a, b, c\}$, $\Gamma = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$ y $\Psi = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$.

Definamos $\alpha, \beta : P(X) \rightarrow P(X)$ según las fórmulas:

$$\alpha(U) = (Fr(U))^c$$

$$\beta(U) = \begin{cases} U & si \quad b \in U \\ Cl(U) & si \quad b \notin U \\ \{c\} & si \quad U = \emptyset \end{cases}.$$

Observemos que (X, Γ) no es ni T_2, ni α-semi T_2, tampoco (X, Γ) es T_1 pero sí es α-semi T_1. (X, Ψ) es β-semi T_1, pero no es β-semi T_2.

A continuación estudiaremos los espacios α-semi $T_{1/2}$, para ello es necesario introducir la noción de: α-clausura, conjuntos α-cerrado generalizado y conjunto α semi cerrado generalizado.

Definición 10. *Sean (X, Γ, α), $A \subseteq X$ y $x \in X$. Se dice que x es un punto de α-clausura del conjunto A si $\alpha(U) \cap A \neq \emptyset$ para cualquier conjunto abierto U de X que contiene al punto x. La α-clausura de A es denotada por* $Cl_\alpha(A)$.

Definición 11. *Sea (X, Γ, α). Un subconjunto A de X se dice que es un conjunto α cerrado generalizado (α . g-cerrado) si $Cl_\alpha(A) \subseteq U$ siempre que $A \subset U$ y U sea α-abierto en X.*

Definición 12. *Sea (X, Γ, α), con α un operador monótono. Un subconjunto B de X se dice que es un conjunto α-semi cerrado generalizado (α-sg. cerrado) si α-$sCl(B) \subset O$, donde $B \subset O$ y O es un conjunto α-semi abierto.*

Observe que cuando α en la definición anterior es el operador clausura, obtenemos la definición de conjunto sg-cerrado en (X, Γ) dada en [2].

Definición 13. *Sea (X, Γ, α). Decimos que X es un espacio α-$T_{1/2}$ si todo conjunto α-cerrado generalizado en X es un conjunto α-cerrado.*

Nota 2. *Si en la definición anterior α es el operador identidad, entonces estamos en presencia de la definición de espacios $T_{1/2}$ dada en* [2].

Nótese además que en la definición de espacios α-$T_{1/2}$ no existe restricción sobre el operador α, sin embargo para introducir la noción de espacios α-semi $T_{1/2}$ es necesario imponer la condición de monotonía sobre el operador asociado de forma tal de garantizar que para cualquier subconjunto B de X, el conjunto α-$sCl(B)$ sea α- semi cerrado.

Definición 14. *Sea (X, Γ, α), con α un operador monótono. Decimos que X es un espacio α-semi-$T_{1/2}$ si todo conjunto α-semi cerrado generalizado en X es un conjunto α-semi cerrado.*

Nota 3. *Es fácil observar que las relaciones entre los espacios: α-semi $T_{1/2}$, α-$T_{1/2}$, $T_{1/2}$ y semi $T_{1/2}$ son las siguientes:*

$$\alpha\text{-semi } T_{1/2} \leftarrow \alpha\text{-}T_{1/2} \rightarrow T_{1/2} \rightarrow \text{semi } T_{1/2}.$$

A continuación investigaremos cuáles son las relaciones entre los distintos espacios y además caracterizaremos a los espacios α-semi $T_{1/2}$.

Teorema 6. *Sea (X, Γ, α), con α un operador monótono. Entonces todo espacio α-semi-$T_{1/2}$ es α-semi-T_0.*

Prueba. Supongamos que (X, Γ) es un espacio α-semi-$T_{1/2}$, pero que no es α-semi T_0. Entonces existen puntos x, y en X, $x \neq y$, con

$$\alpha\text{-}sCl(\{x\}) = \alpha\text{-}sCl(\{y\}).$$

Sea $A = \alpha\text{-}sCl(\{x\}) \cap \{x\}^c$. Afirmamos que A es un conjunto α-sg-cerrado, pero que no es α-semi cerrado.

Consideremos O_x cualquier conjunto α-semi abierto de X que contenga al punto x; como $\alpha\text{-}sCl(\{y\})$, $\{y\} \cap O_x \neq \emptyset$ y $x \in \alpha\text{-}sCl(\{y\})$, $\{y\} \cap O_x$, entonces $y \in O_x$. Pero $\alpha\text{-}sCl(\{y\}) \cap O_x \supset \{y\}$, por lo tanto,

$$\alpha\text{-}sCl(\{x\}) \cap O_x \supset \{y\}.$$

Así $\alpha\text{-}sCl(\{x\}) \cap O_x \cap \{x\}^c \supset \{y\} \cap \{x\}^c$ y

$$\alpha\text{-}sCl(\{x\}) \cap O_x \cap \{x\}^c \supset \{y\},$$

por lo tanto, $A \cap O_x \supset \{y\} \neq \emptyset$, esto implica que $x \in \alpha\text{-}sCl(A)$, pero $x \notin A$, por lo tanto, A no es α-semi cerrado.

Ahora supongamos que $A \subset G$, donde $G \in \alpha - SO(X, \Gamma)$. Necesitamos probar que α-$sCl(A) \subset G$. Para ello es suficiente mostrar, que α-$sCl(\{x\}) \subset G$. Pero α-$sCl(\{x\}) \cap \{x\}^c = A \subset G$, como A no es α-semi cerrado, necesitamos mostrar que $x \in G$. Asumamos que $x \in G^c$, entonces $y \in \alpha$-$sCl(\{x\}) \subset G^c$. Así $y \in \alpha$-$sCl(\{x\}) \cap \{x\}^c = A \subset G$, en consecuencia, $y \in G \cap G^c$, lo cual es una contradicción, así, α-$sCl(\{A\}) \subset G$ y A es un conjunto α-sg-cerrado.

Teorema 7. *Sea (X, Γ, α) con α un operador monótono. Entonces todo espacio α-semi-T_1 es un espacio α-semi-$T_{1/2}$.*

Prueba. Supongamos que X es un espacio α-semi-T_1. Es suficiente mostrar que si A es un subconjunto de X que no es α-semi cerrado, entonces A no es un conjunto α-sg-cerrado.

Sea $A \subset X$, tal que A no es un conjunto α- semi cerrado y $x \in \alpha$-$sCl(A) \setminus A$. Como X es un espacio α-semi T_1, obtenemos que $\{x\}$ es un conjunto α- semi cerrado, por lo tanto, α-$sCl(\{x\}) \subset \alpha$-$sCl(A) \setminus A$ y concluimos que A no es un conjunto α-sg-cerrado.

Teorema 8. *Sea (X, Γ, α), con α un operador monótono. X es un espacio α-semi $T_{1/2}$ si y sólo si para todo $x \in X$, $\{x\}$ es un conjunto α-semi abierto o α-semi cerrado.*

Prueba. Supongamos que X es un espacio α-semi-$T_{1/2}$ y que existe un $x \in X$ tal que $\{x\}$ no es un conjunto α-semi cerrado, como X es el único conjunto α-semi abierto que contiene $\{x\}^c$, $\{x\}^c$ es un conjunto α-sg-cerrado y por lo tanto es un conjunto α-semi cerrado, de esta forma $\{x\}$ es un conjunto α-semi abierto.

Ahora consideremos $A \subset X$ un conjunto α-sg-cerrado y sea $x \in \alpha$-$sCl(A)$. Si $\{x\}$ es un conjunto α-semi abierto, entonces $\{x\} \cap A \neq \emptyset$ de lo contrario, $\{x\}$ es un conjunto α-semi cerrado y α-$sCl(\{x\}) \cap A = \{x\} \cap A \neq \emptyset$. Por lo tanto, A es un conjunto α-semi cerrado.

A continuación daremos tres ejemplos donde se indica que las implicaciones anteriores no son reversibles.

Ejemplo 5. Sea $X = \{a, b, c\}$ y $\Gamma = \{\theta, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$.
Consideremos α cualquier operador monótono asociado a la topología Γ. Entonces (X, Γ) es un espacio α-semi $T_{1/2}$, debido a que cada subconjunto

unitario del espacio X es un conjunto α-semi abierto o α-semi cerrado. Pero, (X,Γ) no es un espacio α-semi T_1 ya que los conjuntos unitarios $\{a\}$, $\{b\}$ no son conjuntos α-semi cerrados.

Ejemplo 6. *Sea* $X = \{a, b, c, d\}$ y $\Gamma = \{\theta, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, X\}$.

Consideremos α el operador identidad o el operador clausura asociado a la topología Γ. Entonces (X,Γ) es un espacio α-semi T_0, debido a que los conjuntos $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b, c\}$ son α-semi abiertos. Observe que $\{c\}$ no es un conjunto α- semi abierto ni α-semi cerrado, en consecuencia, (X,Γ) no es un espacio α-semi $T_{1/2}$.

Ejemplo 7. *Sea* $X = \{a, b, c\}$ y $\Gamma = \{\theta, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X\}$. Definamos α como sigue:

$$\alpha(A) = \begin{cases} A & si\ b \in A \\ cl(A) & si\ b \notin A \end{cases}$$

Observe que X es un espacio α-semi T_0 pero no es un espacio α-semi T_1, también X es α-semi $T_{1/2}$.

Corolario 2. *Sea* (X, Γ, α), *con* α *un operador monótono. X es un espacio* α*-semi* $T_{1/2}$ *si y sólo sí cada subconjunto de X es la intersección de todos los conjuntos* α*-semi abiertos y* α*-semi cerrados que lo contienen.*

Prueba. Sea X un espacio α-semi $T_{1/2}$ y $B \subset X$, entonces $B = \bigcap (\{x\}^c / x \notin B)$ es la intersección de conjuntos α-semi abiertos o α-semi cerrados.

Recíprocamente, supongamos que para cada $x \in X$, $\{x\}^c$ es la intersección de todos los conjuntos α-semi abiertos o α-semi cerrados que lo contienen. Entonces $\{x\}^c$ es un conjunto α-semi abierto o α-semi cerrado. Por lo tanto, X es un espacio α-semi $T_{1/2}$.

Ahora desarrollaremos algunas propiedades relativas a los espacios descritos anteriormente, es decir trataremos de darle respuesta a cuáles subespacios de los espacios: α-$T_{1/2}$, semi-$T_{1/2}$ y α-semi- $T_{1/2}$, son α- $T_{1/2}$, semi $T_{1/2}$ y α-semi-$T_{1/2}$.

Teorema 9. *Sea* (X,Γ) *un espacio topológico y* α *un operador asociado a* Γ, *entonces tenemos las siguientes propiedades*:

1. *Todo subespacio de un espacio* α-$T_{1/2}$ *es un espacio* α- $T_{1/2}$.
2. *Todo subespacio de un espacio semi-* $T_{1/2}$ *es un espacio semi-* $T_{1/2}$.
3. *Todo subespacio de un espacio* α-*semi-* $T_{1/2}$ *es un espacio* α-*semi-* $T_{1/2}$.

Prueba. Probaremos solamente 3, las otras siguen inmediatamente como una consecuencia de 3.

Supongamos que X es un espacio α-semi- $T_{1/2}$, y $A \subset X$. Sea $a \in A$, entonces $\{a\}$ es un conjunto α-semi abierto o α-semi cerrado, luego $\{a\}$ un conjunto α-semi abierto en A o α-semi cerrado en A. Luego se concluye que, A es un espacio α-semi- $T_{1/2}$.

Definición 15. *Sean* (X, Γ, α), (Y, Ψ, β) *dos tripletas. Una función* $f:(X,\Gamma) \to (Y, \Psi)$ *se dice que es* α β-*resoluble si para cada conjunto* β- *semi abierto* U *en* Y, *se tiene que* $f^{-1}(U)$ *es un conjunto* α-*semi abierto en* X.

Nota 4. *Es de observar que cuando los operadores* α, β *son las identidades, entonces la noción de función* α β-*resoluble coincide con la noción de función continua.*

Definición 16. *Sean* (X, Γ, α), (Y, Ψ, β) *dos tripletas. Una función* $f:(X,\Gamma) \to (Y, \Psi)$ *se dice que es pre-*α-*semi abierta (respectivamente* α-*semi cerrada) si para cada* $A \in \alpha - SO(X,\Gamma)$ *(respectivamente* $A \in \alpha - SC(X,\Gamma)$), $f(A) \in \beta - SO(Y, \Psi)$ *(respectivamente* $f(A) \in \beta - SC(Y, \Psi)$).

Teorema 10. *Sean* (X, Γ, α), (Y, Ψ, β) *dos tripletas,* α, β *dos operadores monótonos y* $f: (X,\Gamma) \to (Y, \Psi)$ *una función que es:* α β-*resoluble, pre-*α-*semi cerrada y sobreyectiva: Si* (X,Γ) *es un espacio* α-*semi* $T_{1/2}$ *entonces* (Y, Ψ) *es un espacio* β-*semi* $T_{1/2}$.

Prueba. Primeramente mostraremos que si $B \subset Y$ es un conjunto β-sg-cerrado, probaremos que $f^{-1}(B)$ es un conjunto α-sg-cerrado.

Sea $f^{-1}(B) \subset O$, donde O es un conjunto α-semi abierto en (X,Γ), como $f(\alpha - sCl(f^{-1}(B)) \cap O^c) \subset f(\alpha - sCl(f^{-1}(B))) \cap f(O^c) \subset f(\alpha - sCl(f^{-1}(B))) \cap B^c \subset \beta - sCl(f(f^{-1}(B)))) \cap B^c \subset \beta - sCl(B) \cap B^c$.

Ahora si B es un conjunto β-sg-cerrado, entonces $\beta - sCl(B) \cap B^c = \emptyset$, luego, $f(\alpha - sCl(f^{-1}(B) \cap O^c) = \emptyset$, así, $\alpha - sCl(f^{-1}(B) \cap O^c = \emptyset$ concluimos entonces que, $f^{-1}(B)$ es un conjunto α-sg-cerrado, debido a que

$$\alpha - sCl(f^{-1}(B) \subset O.$$

Ahora retornando al teorema. Usando el hecho que (X, Γ) es un espacio α-semi $T_{1/2}$, obtenemos que $f^{-1}(B)$ es un conjunto α-semi cerrado y por lo tanto $f(f^{-1}(B)) = B$ es un conjunto β-semi cerrado, así (Y, Ψ) es un espacio β-semi $T_{1/2}$.

2. Referencias

[1] Kasahara, S. (1979). "*Operator-Compact Spaces*". Mathematica Japonica, 21, 97-105.

[2] Ogata, H. (1991). "*Operation on Topological Spaces and Associated Topology*". Mathematica Japonica 36 N-1, 175-184.

[3] Levine,N.(1963). "*Semi Open Set and Semi Continuity in Topological Spaces*". American Mathematical Monthly 70, 36-41.

[4] Carpintero, C., Rosas, E., Vielma J. (1998). "*Operadores Asociados a una Topología Γ sobre un Conjunto X y Nociones Conexas*". Divulgaciones Matemáticas Vol 6, N° 2, 139-148.

[5] Rosas, E. y Vielma, J. (1998). "*Operator-Compact and Operator-Connected Spaces*". Scientiae Mathematicae,Vol 1, N°2, 203-208.

* AMS(1980) subject clasification. Primary 54A05, 54A10, 54D10

E Rosas, C. Carpintero, M. Salas

Universidad de Oriente, Departamento de Matemática.Venezuela.

erosas@cumana.sucre.udo.edu.ve, ccarpi@cumana.sucre.udo.edu.ve

msalas@cumana.sucre.udo.edu.ve

J. Vielma

Universidad de los Andes, Departamento de Matemática. Venezuela

vielma@ciens.ula.ve