Pro Mathematica Vol. XIV, Nos. 27-28, 2000

ALGEBRAS C*, K-TEORÍA Y CLASIFICACIÓN

*Christian **Valqui***

Resumen

Daremos un vistazo a un campo de la matemática que ha evolucionado mucho en los últimos 25 años: La clasificación de las álgebras C a través de la K-teoría.*

El presente artículo tiene como contenido la charla dada el 26 de Junio del 2000 en el coloquio de la Sociedad Matemática Peruana. Daremos algunas definiciones y algunos ejemplos básicos de álgebras C^* para luego pasar al tema principal que es la clasificación de álgebras C^* a través de la K-teoría. Solamente presentaremos a grandes rasgos el resultado de Elliott sobre la clasificación de álgebras AF que marcó el inicio del llamado programa de Elliott que consiste justamente en clasificar las álgebras C^* usando la K-teoría.

✐ *Profesor de la Sección Matemáticas, Departamento de Ciencias, PUCP.*

En los últimos 20 años muchos matemáticos de primer nivel se han dedicado a implementar este programa y han logrado profundos resultados de los cuales solamente mencionaremos el de Kirchberg que en 1994 logró la clasificación completa, a través de la K-teoría, de las álgebras PISUN-puramente infinitas, simples, unitales y nucleares-que cumplen el UCT [4]. Además se han desarrollado en este intento de implementar el programa numerosos métodos matemáticos que han encontrado aplicación en muchas otras áreas de las matemáticas.

1. Definiciones y ejemplos

Definición 1.1 *Un álgebra C^* es un álgebra A involutiva (con 1) sobre $\mathbb{C}$, normada y completa de modo que para todo elemento $x \in A$ se cumple*

$$\|x^*x\| = \|x\|^2$$

Nos vamos a restringir en la primera parte a las álgebras unitales porque esto simplifica la exposición, manteniéndose las ideas principales. Veremos algunos ejemplos que a la vez clarifican la definición:

Ejemplo 1.2 *Sea*

$$A = C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{C} \quad f \text{ continua}\}$$

el álgebra de funciones continuas del intervalo $I = [0, 1]$ a los números complejos con la multiplicación dada por la multiplicación en cada punto, $(f \cdot g)(x) = f(x)\, g(x)$. El 1 es obviamente la función constante $\bar{1}(x) = 1$.

Revisaremos que se cumplen cada una de las propiedades:

- A es un álgebra involutiva (con 1), con la involución $* : A \to A$ de modo que $f^*(x) = \overline{f(x)}$ es la compleja conjugada de f.
- La norma $\|f\|$ está dada por

$$\|f\| := \sup_{x \in I}\{|f(x)|\}$$

Se cumple que $\|f \cdot g\| \leq \|f\| \cdot \|g\|$, así que A es un álgebra normada.

- A es completa, pues toda sucesión de Cauchy de funciones continuas es convergente. Nótese que convergencia de funciones en la norma dada significa convergencia uniforme.
- También la última condición se cumple pues

$$\begin{aligned} \| f^* f \| &= \sup_{x \in I} \{ \overline{f(x)} f(x) \} \\ &= \sup_{x \in I} \{ |f(x)|^2 \} \\ &= \sup_{x \in I} \{ |f(x)| \}^2 \\ &= \| f \|^2 . \end{aligned}$$

Este primer ejemplo permite una generalización: El papel del intervalo $I = [0, 1]$ puede ser desempeñado por cualquier otro espacio topológico compacto X. Entonces tendremos el álgebra C^* de funciones continuas sobre X que es el álgebra $C(X)$. Hay que notar que en estos ejemplos se cumple la ley de conmutatividad $f \cdot g = g \cdot f$ para todo f, g. Veremos más adelante que este último ejemplo es el caso más general de álgebras C^* conmutativas. Presentemos nuestro segundo ejemplo:

Ejemplo 1.3 *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo. (Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ con una forma sesquilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ lineal en la primera y conjugada lineal en la segunda variable, que es completo respecto a la norma definida por $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Consideremos el álgebra de operadores $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, con el producto dado por la composición y la involución definida por la adjunta, que para cada $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ está definida por*

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle, \ \forall x, \ y \in \mathcal{H}.$$

También aquí se cumplen las propiedades exigidas en la definición:

- El 1 es el operador identidad en $\mathcal{H}$.
- La norma está dada por

$$\|A\| := \sup\{\|Ax\| \ , \ \|x\| = 1\}.$$

Se cumple que $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$, pues suponiendo que $B \neq 0$ se tiene

$$\begin{aligned}
\|AB\| &= \sup\left\{|ABx| \,,\ |x| = 1\right\} \\
&= \sup\{ \frac{|ABx|}{|Bx|} |Bx| \,,\ |x| = 1,\ Bx \neq 0\} \\
&\leq \sup\{ \left| A\left(\frac{Bx}{|Bx|}\right)\right| \,,\ |x| = 1,\ Bx \neq 0\} \cdot \sup\{ |Bx| \,,\ |x| = 1 \} \\
&\leq \sup\left\{|A(y)| \,,\ |y| = 1\right\} \cdot \|B\| \\
&= \|A\| \cdot \|B\|.
\end{aligned}$$

- $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ es completa: se define puntualmente el operador límite de una sucesión de Cauchy de operadores usando

$$|A_n x - A_m x| \leq \|A_n - A_m\| \cdot |x|$$

y que $\mathcal{H}$ es completo.

- Falta ver que efectivamente $\|A^* A\| = \|A\|^2$. Para esto notemos que $\|A\| = \|A^*\|$ lo cual se ve usando la definición alternativa

$$\|A\| = \sup\left\{|\langle Ax,\ y\rangle| \,,\ |x| = 1 = |y|\right\}$$

y que $|\langle Ax,\ y\rangle| = |\langle x,\ A^* y\rangle|$. Entonces tenemos por un lado que

$$\|A^* A\| \leq \|A^*\| \cdot \|A\| = \|A\|^2.$$

Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned}
\|A\|^2 &= \sup\left\{|Ax| \ ;\ |x| = 1\right\}^2 \\
&= \sup\left\{|Ax|^2 \ ;\ |x| = 1\right\} \\
&= \sup\left\{\langle Ax,\ Ax\rangle \ ;\ |x| = 1\right\} \\
&= \sup\left\{\langle A^* Ax,\ x\rangle \ ;\ |x| = 1\right\}
\end{aligned}$$

$$\leq \quad \sup\{|A^* Ax| \; ; \; |x| = 1\}$$

$$= \quad \|A^* A\|.$$

Es obvio que cualquier subálgebra involutiva cerrada de un álgebra C^* es a su vez un álgebra C^*.

2. Resultados Clásicos

Los ejemplos que hemos dado en la sección anterior agotan prácticamente todas las álgebras C^* existentes. Esto se desprende de los siguientes dos resultados que se encuentran entre los resultados clásicos más importantes sobre álgebras C^*.

Primero veremos que si A es un álgebra C^* conmutativa entonces A es de la forma $A = C(X)$. Para esto definimos el espacio $S(A)$ de los homomorfismos continuos de álgebras involutivas de A en $\mathbb{C}$.

$$S = \{\phi : A \to \mathbb{C}, \;\; \phi \text{ homomorfismo continuo}\}.$$

Existe un morfismo de álgebras C^* llamada la transformada de Gelfand: $\Gamma : A \to C(S)$ dado por $x \mapsto f_x$ con $f_x(\phi) := \phi(x)$ para todo $x \in A, \phi \in S$. Tenemos el siguiente resultado de Gelfand, que presentamos aquí sin demostración:

Teorema 2.1 *Si A es un álgebra C^* conmutativa (con 1), entonces el espectro $S(A)$ es compacto y la transformada de Gelfand $\Gamma : A \to C(S)$ es un isomorfismo isométrico.*

Comentario: Si A no es unital, entonces el espectro sólo es localmente compacto. En ese caso A es isomorfo al álgebra de funciones que desaparecen en el infinito. Este teorema es el resultado más importante para las álgebras C^* conmutativas. Podemos ver entonces que todo álgebra C^* conmutativa es en efecto un álgebra de funciones continuas.

Es claro que no todas las álgebras C^* son conmutativas, como se ve en el segundo ejemplo que mencionamos. El álgebra de operadores $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ no es conmutativo si la dimensión de $\mathcal{H}$ es mayor que 1:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

no conmutan, y siempre se puede encontrar matrices parecidas si la dimensión es mayor que 1. El resultado que nos brinda la forma general de las álgebras C^*, sean o no conmutativas lo veremos ahora:

Teorema 2.2 *Toda álgebra C^* es subálgebra de un álgebra de operadores.*

Este resultado marcó un hito en la teoría de las álgebras C^*.

Demostración: Solamente daremos una idea de la demostración: Sea A un álgebra C^*. Para cada $x \in A$ encontramos un funcional lineal positivo con $f(x) \neq 0$. Definimos un producto interno $\langle x, y \rangle := f(y^* x)$ para el espacio vectorial subyacente a A. Completando se obtiene un espacio de Hilbert $\mathcal{H}_x$ con una representación de A (Una representacin es un morfismo $A \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_x)$ de álgebras C^* y en este caso está dada por la multiplicación por la izquierda en el álgebra original). Si se toma $\mathcal{H} = \prod_{x \in A} \mathcal{H}_x$ obtenemos una representación isométrica de A en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, lo cual significa que A es isométricamente isomorfo a una subálgebra de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. □

Veamos como un álgebra conmutativa se puede describir como subálgebra de un álgebra de operadores:

$$\mathbb{C}[0,1] \subset \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Para esto se pone $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2[0, 1]$ que es el espacio de Hilbert que resulta de completar el espacio de funciones con cuadrado integrable

$$L^2[0,1] = \{ f : [0, 1] \to \mathbb{C},\ \int_0^1 |f| < \infty \}$$

con el producto interno $\langle f, g \rangle := \displaystyle\int_0^1 f(x)\, \bar{g}(x)\, dx$.

La acción de las funciones continuas sobre este espacio está dada simplemente por la multiplicación de funciones

$$f([g]) := [f \cdot g].$$

Esto nos da una manera canónica de insertar cualquier álgebra C^* conmutativa dentro de un álgebra de operadores.

3. K- Teoría de álgebras C^*

La idea de la clasificación es la siguiente: La categoría bastante complicada de álgebras C^* se clasifica por sus invariantes, que en este caso son grupos abelianos. La teoría de grupos abelianos es bastante más simple que la teoría de álgebras C^*. Para esto definiremos la K-teoría de un álgebra C^* como el grupo envolvente del semigrupo de módulos proyectivos sobre el álgebra. Esta definición es bastante abstracta, vamos a ver como se construyen estos grupos de K-teoría concretamente. Para esto nos restringiremos a la construcción para álgebras unitales, lo cual deja de lado algunos tecnicismos que no clarifican la idea general.

Si $\mathcal{A}$ es un álgebra C^* que es una subálgebra de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, se puede definir el álgebra $\mathcal{M}_2(\mathcal{A})$ como subálgebra de $\mathcal{L}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ donde los elementos son de la forma

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

con a, b, c y d en $\mathcal{A}$ y actúan sobre un elemento $(x, y) \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ a través de $B(x, y) = (ax + by, cx + dy)$. Hay una inclusión canónica de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{M}_2(\mathcal{A})$. En general hay una cadena de inclusiones

$$\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{M}_2(\mathcal{A}) \hookrightarrow \mathcal{M}_3(\mathcal{A}) \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \mathcal{M}_n(\mathcal{A}) \hookrightarrow \mathcal{M}_{n+1}(\mathcal{A}) \hookrightarrow \dots .$$

Esto nos da un sistema directo de álgebras. Consideremos la unión infinita de los $\mathcal{M}_n(\mathcal{A})$, que llamaremos

$$\mathcal{M}_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_n .$$

El conjunto de proyecciones (elementos idempotentes autoadjuntos) en $\mathcal{M}_\infty$ se provee de una relación de equivalencia:

Dos elementos $p^2 = p = p^*$ y $q^2 = q = q^*$ son equivalentes si existe un elemento $z \in \mathcal{M}_\infty$ con $zz^* = p$ y $z^* z = q$. Se define la operación suma en este conjunto de proyecciones de la siguiente manera: Si $p \in \mathcal{M}_n$ y $q \in \mathcal{M}_m$ entonces $[p] + [q] = [r]$ donde r es una matriz en $\mathcal{M}_{n+m} \subset \mathcal{M}_\infty$ dada por

$$r = \begin{pmatrix} p & \vdots & 0 & \dots & \\ \dots & . & \dots & \dots & \\ 0 & \vdots & q & & \\ & \vdots & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

donde el cuadrado de arriba a la izquierda es una matriz $n \times n$. Se puede ver que esto es una operación conmutativa y asociativa. Como resultado obtenemos el semigrupo $V(\mathcal{A})$.

Definición 3.1 *La K-teoría de $\mathcal{A}$ es el grupo universal envolvente de $V(\mathcal{A})$. Un elemento general de este grupo de K-teoría es una diferencia formal entre dos clases de equivalencia.*

4. Clasificación de Algebras AF

Ahora dejamos de lado la restricción a álgebras unitales. Un álgebra es de dimensión finita si el espacio vectorial subyacente es de dimensión finita. Todo álgebra C^* de dimensión finita es necesariamente una suma directa finita de álgebras simples de la forma $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$. La K-teoría de éstas álgebras es muy fácil de calcular, pues la K-teoría de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es igual a $\mathbb{Z}$. Entonces la K-teoría de $\mathcal{M}_{k_1} \oplus \dots \oplus \mathcal{M}_{k_j} \cong \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$. Se puede definir lo que es el límite inductivo de un sistema directo de álgebras C^*. La K-teoría es compatible con los límites directos, es decir

$$K(\underset{\rightarrow}{lim} A_k) = \underset{\rightarrow}{lim} K(A_k).$$

Definición 4.1 *Un álgebra AF es un álgebra C^* que es límite directo de álgebras de dimensión finita.*

El siguiente teorema es la base para el resultado de clasificación:

Teorema 4.2 *Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son álgebras AF y existe un isomorfismo $\phi : K(\mathcal{A}) \to K(\mathcal{B})$ que respeta la clase del 1 (visto como proyección en $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_\infty(\mathcal{A})$) entonces existe un isomorfismo $f: A \to B$ de modo que $K(f) = \phi$.*

Demostración: Nuevamente nos restringimos a dar una breve idea de la demostración. Si $\mathcal{A} = \lim_{\to} A_n$ y $\mathcal{B} = \lim_{\to} B_n$, entonces el isomorfismo en K-teoría viene de un isomorfismo de sistemas directos (entrelazado) de grupos abelianos. Como los morfismos entre álgebras simples $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ están en biyección con los morfismos entre sus grupos de K-teoría, el entrelazado de morfismos de grupos abelianos determina un entrelazado de sistemas directos de álgebras C^*, que a su vez induce un isomorfismo f entre los límites directos A y B. Por la construcción se puede ver que este isomorfismo f induce en K-teoría $\phi = K(f)$.

5. Referencias

[1] Blackadar, Bruce. (1986). "*K-Theory for Operator Algebras*". Springer Verlag New York Inc.

[2] Dixmier, Jacques. (1977). "*C*-algebras*". North-Holland mathematical library, Amsterdam.

[3] Elliott, G. A. (1976). "*On the classification of inductive limits of sequences of semisimple finite dimensional algebras*". Journal of Algebra 38.

[4] Kirchberg, E. (1994). "*Classification*". Preprint "Third draft".

[5] Wegge-Olsen N. E. (1993). "*K-Theory and C*-Algebras: A Friendly Approach*". Oxford University Press Inc., New York.

Christian Valqui
cvalqui@pucp.edu.pe