Pro Mathematica Vol. XIV, Nos. 27-28, 2000

TRENES DE ONDAS EN HABITATS PERIODICOS EN UN MODELO DEL TIPO KOLMOGOROV

Mario ***Cavani***

Resumen

En el presente trabajo se considera un sistema de reacción y difusión que representa un modelo depredador-presa de tipo Kolmogorov, y se supone que las especies difunden, de acuerdo a la Ley de Fick, en un espacio unidimensional. Utilizando el método de Liapunov-Schmidt se demuestra que, bajo ciertas condiciones sobre los parámetros, el sistema presenta soluciones en la forma de trenes de ondas cuando el punto de equilibrio de coordenadas positivas pierde estabilidad.

Departamento de Matemáticas, Universidad de Oriente, Venezuela.

Abstract

In this paper a reaction-diffusion system modelling a predator-prey of Kolmogorov type system is considered, and is supossed that the species diffuse trough the one-dimensional space according to the Fick Law. By mean of the Lyapunov-Schmidt method it is shown that under certain conditions imposed on the parameters, the system exhibit wave train solutions when the equilibrium of positive coordinates lost its stability.

1. Introducción

En el presente trabajo se considera un sistema de ecuaciones diferenciales parciales introducidas por el autor y Miklós Farkas en [2], el cual representa un modelo depredador-presa planteado en términos del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de reacción y difusión:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial t} &= d_1 \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \varepsilon N(1 - \frac{N}{K}) - \frac{\beta N P}{\beta + N} \\ \frac{\partial P}{\partial t} &= d_2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - PM(P) + \frac{\beta N P}{\beta + N}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde $t > 0$ representa al tiempo y $x \in \Omega = [0, 2\pi]$ el espacio unidimensional en el cual las especies se encuentran continuamente distribuidas y donde difunden siguiendo la Ley de Fick [9]. Las variables $N = N(t, x)$ y $P = P(t, x)$ representan las densidades de las poblaciones presa y depredadora en el tiempo t y lugar x del espacio unidimensional Ω. Los parámetros del sistema son considerados positivos y con los siguientes significados biológicos: d_1 y d_2 representan las difusividades respectivas de la población presa y de la población depredadora; ε es la tasa específica de crecimiento de la presa en ausencias de depredación y sin limitaciones ambientales. En ausencia de depredadores la población presa crece logísticamente con capacidad de carga (o constante de saturación ambiental) K. La respuesta de funcionamiento del depredador se asume en la forma conocida como disco de Holling [7], [5], [13]. Por medio de este tipo de respuestas de funcionamiento se modela a las especies depredadoras que se sacian en el proceso de devoramiento de la presa, y en este caso se define por medio de la función

$$V(N) := \frac{N}{1 + \frac{N}{\beta}},$$

donde el parámetro β mide el efecto de la saciedad. La función $M(P)$ modela la mortalidad del depredador en ausencia de la población presa y viene dada por

$$M(P) := \frac{\gamma + \delta P}{1 + P}$$

donde $\gamma > 0$ es la mortalidad inicial o mortalidad mínima y $\delta > 0$ es la mortalidad límite o máxima mortalidad. Como puede observarse, en este caso, se considera que la mortalidad depende de la cantidad de depredadores. Esta característica diferencia al presente modelo depredador-presa de los modelos clásicos donde a menudo se considera la mortalidad del depredador como una constante. Un estudio de este modelo sin la difusión puede encontrarse en [1].

El resultado principal de este trabajo consiste en mostrar la existencia de soluciones en forma de trenes de ondas bajo condiciones de borde periódicas del tipo:

$$N(t, 0) = N(t, 2\pi), \quad P(t, 0) = P(t, 2\pi), \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial N(t,0)}{\partial x} = \frac{\partial N(t,2\pi)}{\partial x}, \quad \frac{\partial P(t,0)}{\partial x} = \frac{\partial P(t,2\pi)}{\partial x} = 0. \tag{1.3}$$

La demostración de la existencia de las soluciones en la forma de trenes de ondas se basa en el uso del Teorema de la Bifurcación de Hopf, [8], combinado con el método de Liapunov-Schmidt, [11], y nuestra demostración se fundamenta en ideas similares a las descritas en [4].

Es importante señalar que el problema descrito por (1.1) está bien planteado tanto matemática como biológicamente. Para esto considérese el sistema (1.1) con condiciones iniciales

$$\left.\begin{aligned} N(o, x) &= f_1(x), \ x \in \Omega \cup \partial\Omega \\ P(0, x) &= f_2(x), \ x \in \Omega \cup \partial\Omega \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

y con condiciones de frontera

$$\frac{\partial N}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial N}{\partial x}(t,l) = 0\,, \qquad (1.5)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial P}{\partial x}(t,l) = 0\,.$$

El siguiente teorema es una particularización de un teorema general dado en [14], que es aplicable al presente sistema bajo las condiciones 1.4 – 1.5.

Teorema 1. *Sea* $\Omega = (0, l)$, *con* $l > 0$. *Sean* f_1, f_2 *funciones no negativas y a valores en* H^{2+s} $(\Omega \cup \partial\Omega)$, $0 < s < 1$, *con derivadas normales nulas en* $\partial\Omega$. *Entonces*

i) *Para cada* $\tau > 0$, *el sistema con condiciones iniciales (1.4) y condiciones de frontera (1.5) tiene una única solución*

$$(N(t,x), P(t,x)) \in H^{2+s,\frac{s+2}{2}}([0,\tau) \times \Omega \cup \partial\Omega).$$

ii) $N(t,x),\ P(t,x) \geq 0,\ (t,x) \in (0,\tau) \times (\Omega \cup \partial\Omega)$.

iii) *Si ninguna de las* f_i *(en las condiciones iniciales) es idénticamente nula, entonces* $N(t,x) > 0$ y $P(t,x) > 0$, $x \in [0, l]$, $t > 0$.

Como puede verse, la interpretación desde el punto de vista biológico se traduce en afirmar que el modelo descrito por (1.1)-(1.4)-(1.5), está biológicamente bien planteado en el sentido que datos iniciales positivos producen soluciones positivas. El siguiente teorema expresa otra condición importante que deben cumplir los modelos biológicos como lo es el acotamiento de las soluciones.

Teorema 2. *Supongamos que tenemos las condiciones del teorema anterior, y que ninguna de las* f_i $(i = 1, 2)$ *es idénticamente nula. Entonces la única solución* $(N(t,x), P(t,x))$ *que provee el teorema anterior es acotada para todo* $(t,x) \in [0,\infty) \times (\Omega \cup \partial\Omega)$. *Es decir existen constantes* $K_1 > 0$, $K_2 > 0$ *definidas por*

$$K_1 > max\ \{K,\quad sup\ f_1(x)\}$$

$$K_2 > max\ \{K_1,\ sup\ f_2(x\},$$

tal que

$$0 < N(t,x) < K_1,\ 0 < P(t,x) < K_2\} \qquad (1.6)$$

para $(t,x) \in [0,\infty) \times (\Omega \cup \partial\Omega)$.

***Demostración*:** Supongamos que (1.6) no se cumple para todo

$$(t, x) \in [0, \infty) \times (\Omega \cup \partial\Omega).$$

Definamos los conjuntos A y B por:

$$A = \{(N, P) : 0 \leq N \leq K_1, 0 \leq P \leq K_2\},$$

$$B = \{t > 0 : (N(\tau, x)\ P(\tau, x)) \in A, \text{ para todo } (\tau, x) \in [0, \infty) \times (\Omega \cup \partial\Omega)\}.$$

Si B es no acotado entonces el teorema está demostrado. Si B es acotado, sea $t^* = \sup B$. Entonces debe existir un $x^* \in (\Omega \cup \partial\Omega)$ tal que $(N(t^*, x^*), P(t^*, x^*)) \in \partial A$. Por el teorema anterior las soluciones $(N(t, x)), P(t, x))$ son estrictamente positivas y al menos una de las siguientes igualdades se cumple

$$N(t^*, x^*) = K_1 \quad \text{ó} \quad P(t^*, x^*) = K_2. \tag{1.7}$$

Supongamos que $N(t^*, x^*) = K_1$ [los argumentos son similares si se cumple una cualquiera o ambas igualdades en (1.7)], en tal caso $N(t^*, x^*)$ es un máximo de $N(t^*, x)$ para todo $x \in \Omega \cup \partial\Omega$. Supongamos que $x^* \in \Omega$; entonces

$$\frac{\partial^2 N}{\partial x^2}(t^*, x^*) \leq 0 \quad \text{y} \quad \varepsilon N\left(1 - \frac{N}{K}\right) - \frac{\beta N P}{\beta + N} < 0$$

en el punto (t^*, x^*) debido a que

$$N(t^*, x^*) > 0 \quad \text{y} \quad \varepsilon\left(1 - \frac{K_1}{K}\right) - \frac{\beta P}{\beta + N} < 0,$$

por lo tanto

$$\frac{\partial N}{\partial t}(t^*, x^*) < 0,$$

lo que implica que

$$N(t, x^*) < K_1, \quad \text{para algún} \quad t < t^*,$$

esto contradice la definición de t^* y no puede existir tal t^*. Supongamos que $x^* \in \partial\Omega$, aseguramos que

$$\frac{\partial^2 N}{\partial x^2}(t^*, x^*) \leq 0,$$

de no ser así

$$\frac{\partial^2 N}{\partial x^2}(t^*, x) > 0,$$

para x perteneciente a algún intervalo con x^* como frontera y $N(t^*, x^*)$ siendo el máximo. Utilizando ahora el Teorema 7 de la página 65 de [10], obtenemos que

$$\frac{\partial N}{\partial \eta}(t^*, x^*) > 0$$

lo que contradice la condición de frontera dada para N. Por lo tanto el conjunto B es no acotado y de aquí la solución $(N(t, x), P(t, x))$ del Teorema 1 se mantiene acotada para todo $t \geq 0$. Esto completa la prueba. ■

2. El Sistema de Reacción

Para continuar es necesario fijar algunas condiciones sobre el sistema de reacción asociado al sistema (1.1). Es decir, el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias dado por

$$\begin{aligned} \dot{N} &= \varepsilon N\left(1 - \frac{N}{K}\right) - \frac{\beta N P}{\beta + N} \\ \dot{P} &= -PM(P) + \frac{\beta N P}{\beta + N}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde el punto denota a la derivada con respecto al tiempo t. N es la densidad de la población presa y P es la densidad de la población depredadora en el tiempo t y los demás parámetros tienen, desde luego, el mismo significado dado antes. Tal como se ha señalado, la tasa de mortalidad $M(P)$ del depredador es una función creciente que se incrementa con la cantidad de depredadores. Esta característica, biológicamente razonable, se expresa por medio de la desigualdad

$$\gamma < \delta.$$

Los aspectos generales del sistema (2.1) relacionados con la estabilidad de los puntos de equilibrio y existencia de órbitas periódicas pueden verse en [1] y un resultado sobre existencia de órbitas homoclínicas puede verse en [6]. En las condiciones dadas en el siguiente teorema los puntos de equilibrio $(0, 0)$ y $(K, 0)$ son inestables y existe un único punto de coordenadas positivas, $(\bar{N}(K), \bar{P}(K))$ el cual pierde estabilidad al variar K. Las condiciones enunciadas sobre los parámetros se mantendrán fijas en el resto del trabajo. La demostración de este teorema puede encontrase en [1].

Teorema 3. *Supóngase que los parámetros del sistema (2.1) satisfacen las siguientes condiciones*

$$i)\quad 0 < \frac{\beta\gamma}{\beta-\gamma} < K,$$

$$ii)\quad \beta \leq \frac{\varepsilon}{\beta} < 1 - \frac{\gamma}{\beta},$$

$$iii)\quad \gamma < \beta = \delta.$$

En tal caso, existen números positivos K^*, $\tilde{K}$ y K_b tales que si ocurre: $K^* < \tilde{K}$ y $K_b \in J$, donde J representa al intervalo $(K^*, \tilde{K})$. Entonces tomando K como parámetro de bifurcación se tiene que el punto de equilibrio $(\bar{N}(K), \bar{P}(K))$ del sistema (2.1) presenta una bifurcación de Andronov-Hopf supercrítica en el valor $K = K_b$. En otra palabras, a medida que K aumenta, cuando se alcanza el valor $K = K_b$, el punto de equilibrio de coordenadas positivas $(\bar{N}(K), \bar{P}(K))$ pierde estabilidad, y, existe un número $\mu > 0$, tal que para valores de K en el intervalo $(K_b, K_b + \mu)$ el sistema (2.1) posee una única solución periódica de amplitud pequeña, la cual es orbital asintóticamente estable.

3. Trenes de Ondas Viajeras

En la preśente sección se considera el efecto de la distribución espacial sobre las densidades de las poblaciones. A tal efecto se considera que las especies viven en un habitat unidimensional de longitud 2π unidades y se demostrará la existencia de soluciones en la forma de trenes de ondas viajeras.

Definición 1. *Una solución $(N(t, x), P(t, x))$ del sistema (1.1) con las condiciones de borde (1.2) y (1.3) se dice que tiene la forma de tren de onda viajera si tiene la forma*

$$(N(t, x), P(t, x)) = (N(kx + ct), P(kx + ct))$$

y esta solución es periódica en la variable $z = kx + ct$. Los números k y c son considerados no nulos y reciben el nombre de número de onda y velocidad de onda respectivamente.

Cabe observar que para estudiar la estabilidad del punto de equilibrio de coordenadas positivas $\overline{N}, \overline{P} := (\overline{N}(K), \overline{P}(K))$, se linealiza (2.1) en este punto obteniéndose la siguiente matriz jacobiana

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon\left(1 - \dfrac{2\overline{N}}{K}\right) - \dfrac{\beta^2 \overline{P}}{(\beta + \overline{N})^2} & \dfrac{\beta \overline{N}}{(\beta + \overline{N})} \\ \dfrac{\beta^2 \overline{P}}{(\beta + \overline{N})^2} & \dfrac{(\beta - \gamma)\overline{P}}{(1 + \overline{P})^2} \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Por medio de un cálculo directo es fácil demostrar el siguiente lema.

Lema 4. *Sea M una matriz 2x2, I la matriz identidad 2x2, k y d números reales. Si la matriz M tiene autovalores λ_1 y λ_2, entonces la matriz $B = k^2 dI + M$, tiene autovalores de la forma $\overline{\lambda}_{1,2} = -k^2 d + \lambda_{1,2}$.*

Ahora se está en condiciones de demostrar la existencia de las soluciones en forma de tren de ondas viajeras.

Teorema 5. *Supóngase que se cumplen las hipótesis del Teorema 2.1, y supóngase además que $K \in (K_b, K_b + \mu)$ y que las difusividades de la presa y del depredador en el sistema (1.1) son iguales, esto es, $d_1 = d_2 = d$. Entonces el sistema (1.1) con las condiciones de borde descritas por (1.2)-(1.3), posee una familia de soluciones a dos parámetros, $(N(z, \alpha, k), P(z, \alpha, k))$, donde $z = kx + ct$. Estas soluciones están definidas y son continuas en (α, k) para α y $|k - k_0|$ pequeños, con, $k_0 = \left(\dfrac{\nu(K)}{d}\right)^{\frac{1}{2}}$ donde $\nu(K)$ es la parte real de los autovalores de la matriz A evaluada en el punto de equilibrio $(\overline{N}, \overline{P})$. Además:*

i) $N(z, \alpha, k)$ y $P(z, \alpha, k)$ *son 2π-periódicas como funciones de* $z = kx + ct$,

ii) $c = w^*(0, k_0) = \omega(K)$, *donde $\omega(K)$ es la parte imaginaria de los autovalores de la matriz A evaluada en el punto de equilibrio $(\overline{N}, \overline{P})$.*

Demostración: El sistema con difusión (1.1) se representa en forma matricial de la siguiente manera

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} N \\ P \end{pmatrix} = d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\begin{pmatrix} N \\ P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon N\,(1-\frac{N}{K}) & - & \frac{\beta NP}{\beta+N} \\ -\frac{\gamma+\delta P}{1+P}P & + & \frac{\beta NP}{\beta+N} \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Si se considera una pequeña perturbación

$$N(t, x) = \bar{N} + \alpha u(t, x)$$
$$P(t, x) = \bar{P} + \alpha v(t, x)$$

del punto de equilibrio de coordenadas positivas, del cual se hace referencia en el Teorema 2.1, $(\bar{N}, \bar{P})$, donde $x \in [0, 2\pi]$, $t > 0$. Entonces en términos de u y v este sistema se transforma en el siguiente:

$$\begin{aligned} \alpha\frac{\partial u}{\partial t} &= \alpha d\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon(\bar{N}+\alpha u)\left(1 - \frac{\bar{N}+\alpha u}{K}\right) - \beta p(u, v, \alpha) \\ \alpha\frac{\partial v}{\partial t} &= \alpha d\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - q(u,v,\alpha) + \beta p(u,v,\alpha)\,, \end{aligned} \tag{3.3}$$

donde,

$$p(u, v, \alpha) = \frac{\beta(\bar{N}+\alpha u)(\bar{P}+\alpha v)}{(\beta+\bar{N}+\alpha u)}$$

$$q(u, v, \alpha) = \frac{\gamma+\beta(\bar{P}+\alpha v)}{1+(\bar{P}+\alpha v)}(\bar{P}+\alpha v)\,.$$

Las expansiones de las funciones p y q de acuerdo a la fórmula de Taylor hasta términos de tercer orden con respecto a α están dadas por:

$$\begin{aligned} p(u, v, \alpha) = {} & \frac{\bar{N}\bar{P}}{\beta+\bar{N}} + \left(\frac{\beta\bar{P}u}{(\beta+\bar{N})^2} + \frac{\bar{N}v}{\beta+\bar{N}}\right)\alpha \\ & + \left(\frac{\beta}{(\beta+\bar{N})^2}uv - \frac{\beta\bar{P}}{(\beta+\bar{N})^2}u^2\right)\frac{\alpha^2}{2} \\ & + \left(\frac{-2\beta(3\beta^2+2\beta\bar{N}-\bar{N}^2+4\bar{N}}{(\beta+\bar{N})^2}uv^2 + \frac{6\beta\bar{P}}{(\beta+\bar{N})^2}u^3\right)\frac{\alpha^3}{6} + o(\alpha^4)\,. \end{aligned}$$

$$q(u,v,\alpha) = \frac{\gamma+\beta\bar{P}}{1+\bar{P}}\bar{P} + \left(\frac{(\beta-\gamma)\bar{P}}{(1+\bar{P})^2} + \frac{\gamma+\beta\bar{P}}{1+\bar{P}}\right)v\alpha$$

$$+ \left(\frac{-2(\gamma+2\beta\bar{P}+\beta\bar{P}^2}{(1+\bar{P})^3}v^2\right)\frac{\alpha^2}{2}$$

$$+ \left(\frac{6\beta(1+\bar{P})^2 - 10(\gamma+\beta\bar{P})}{(1+\bar{P})^4}v^3\right)\frac{\alpha^3}{6} + o(\alpha^4)\,.$$

Sustituyendo ahora estas expresiones en las ecuaciones (3.3) el sistema de ecuaciones de reacción y difusión puede representarse de la siguiente manera:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left[\varepsilon\left(1-\frac{2\bar{N}}{K}\right) - \frac{\beta^2\bar{P}}{(\beta+\bar{N})^2}\right]u - \frac{\beta\bar{N}}{\beta+\bar{N}}v$$

$$-\frac{\alpha\beta^2}{2(\beta+\bar{N})^2}uv - \alpha\left[\frac{\varepsilon}{K} + \frac{\beta^2\bar{P}}{(\beta+\bar{N})^3}\right]u^2 \tag{3.4}$$

$$+\frac{\alpha^2}{3}\frac{\beta^2(3\beta^2+2\beta\bar{N}-\bar{N}^2+4\bar{N})}{(\beta+\bar{N})^5}uv^2 - \frac{\alpha^2\beta^2\bar{P}}{(\beta+\bar{N})^2}u^3 + o(\alpha^3)\,,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = d\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\beta^2\bar{P}}{(\beta+\bar{N})^2}u - \frac{(\beta-\gamma)\bar{P}}{(1+\bar{P})^2}v - \frac{\alpha\beta^2}{(\beta+\bar{N})^2}uv - \frac{\alpha\beta^2\bar{P}}{(\beta+\bar{N})^3}u^2$$

$$+\frac{\alpha^2}{3}\frac{3\beta(1+\bar{P})^2-5(\gamma+\beta\bar{P})}{(1+\bar{P})^4}v^3 - \frac{\alpha^2}{3}\frac{\beta^2\bar{N}(3-2\beta)+3\beta^4}{(\beta+\bar{N})^2}uv^2 \tag{35}$$

$$+\frac{\alpha^2\beta\bar{P}}{(\beta+\bar{N})^2} + o(\alpha^3)\,.$$

Lo cual escrito en forma más simple queda:

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} = d\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} + A\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} \tag{3.6}$$

$$+\alpha f(u,v) + \alpha^2 g(u,v) + o(\alpha^3)$$

donde A es la matriz dada por (3.1) y las funciones f y g, tal como puede verse de las ecuaciones (3.4) y (3.5), están dadas por:

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} -\dfrac{\beta^2}{2(\beta+\bar{N})^2} - \left[\dfrac{\varepsilon}{K} + \dfrac{\beta^2\bar{P}}{(\beta+\bar{N})^3}\right] \\ -\dfrac{\beta^2}{(\beta+\bar{N})^2}uv - \dfrac{\beta^2\bar{P}}{(\beta+\bar{N})^3}u^2 \end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

$$g(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\beta^2(3\beta^2+2\beta\bar{N}-\bar{N}^2+4\bar{N}}{3(\beta+\bar{N})^5} - \dfrac{\beta^2\bar{P}}{(\beta+\bar{N})^2}u^3 \\ \dfrac{3\beta(1+\bar{P})^2-5(\gamma+\beta\bar{P})}{(1+\bar{P})^4}v^3 - \dfrac{\beta^2\bar{N}(3-2\beta)+3\beta^4}{3(\beta+\bar{N})^2}uv^2 \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Ahora bien, para $K \in (K_b, K_b + \mu)$, sean $\lambda_{1,2} = \nu(K) \pm iw(K)$ los autovalores de la matriz A, donde $\nu(K) > 0$, $w(K) > 0$. Considérese K fijo en el intervalo $(K_b, K_b + \mu)$ y la matriz $H(k^2) = -k^2dI + A$, donde I es la matriz identidad; de acuerdo al lema previo, los autovalores de la matriz $H(k^2)$ están dados por $\lambda_{1,2} = -k^2d + \nu(K) \pm iw(K)$. Puede verse claramente que para el número positivo $k_0 = (\frac{\nu(K}{d})^{\frac{1}{2}}$, ocurre que la matriz posee un par de autovalores imaginarios puros dados por $\pm\ iw(K)$. Con estos hechos en mente, aplicaremos ahora el método de Liapunov-Schmidt por medio de un autovalor simple ([12], [11], [3]) a la ecuación (3.6). Para esto definimos los siguientes espacios de funciones:

$$X = \{U : [0,2\pi] \to R^2 \mid U \in C^0[0,2\pi], U(0) = U(2\pi)\}$$

$$Y = \{U : [0,2\pi] \to R^2 \mid U \in C^2[0,2\pi], U(0) = U(2\pi), U'(0) = U'(2\pi)\}.$$

Consideraremos que X e Y están dotados de las normas de $C^0[0, 2\pi]$ y $C^2[0, 2\pi]$ respectivamente, los cuales tienen el significado usual del espacio de funciones continuas y el espacio de las funciones dos veces continuamente diferenciables, respectivamente. Además, para U y V en X se considera el producto escalar definido por

$$< U, V > = \int_0^{2\pi} U_1 V_1 + U_2 V_2 \, dx . \tag{3.9}$$

Para la búsqueda de las soluciones en la forma de trenes de ondas introducimos la variable $z = k_0 x + wt$, de modo que consideraremos funciones de la forma $U(z) = col(U_1(k_0 x + wt), U_2(k_0 x + wt))$. Al sustituir en la ecuación (3.6) obtenemos

$$w \frac{dU}{dz} = k_0^2 dI \frac{d^2 U}{dt^2} + AU + \alpha f(U) + \alpha^2 g(U) + o(\alpha^3) , \tag{3.10}$$

lo que reescribimos como

$$k_0^2 dI \frac{d^2 U}{dt^2} - w \frac{dU}{dz} + AU + \alpha f(U) + \alpha^2 g(U) + o(\alpha^3) = 0 . \tag{3.11}$$

Denotando la parte izquierda de esta ecuación por $F(\alpha, U)$, nuestro problema se reduce a encontrar las soluciones de la ecuación $F(\alpha, U) = 0$. Como la derivada de Fréchet de un operador lineal es el mismo operador, a la derivada $D_2 F(0,0)$, la designamos por medio del operador $L : Y \to X$, definido por

$$LU = k_0^2 dI \frac{d^2 U}{dt^2} - w(K) \frac{dU}{dz} + AU .$$

El núcleo de este operador está constituido por las soluciones del sistema bidimensional de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo.orden a coeficientes constantes

$$k_0^2 dI \frac{d^2 U}{dt^2} - w(K) \frac{dU}{dz} + AU = 0 .$$

Las soluciones de esta ecuación, en su forma general, se pueden representar por $\phi e^{\lambda z}$, donde $\lambda \in C$ y ϕ es un vector bidimensional con componentes en C. Sustituyendo esta forma de las soluciones en la ecuación anterior, nos queda

$$\lambda^2 k_0^2 dI \phi e^{\lambda z} - \lambda w(K) \phi e^{\lambda z} + A \phi e^{\lambda z} = 0 ,$$

lo que es equivalente a

$$(\lambda^2 k_0^2 dI + A - \lambda w(K) I) \phi = 0 .$$

La ecuación anterior tiene solución no trivial, si y sólo si, $det(\lambda^2 k_0^2 dI + A - \lambda iw(K)I) = 0$. Pero sabemos que $det(-k_0^2 dI + A - iw(K)I) = 0$, puesto que $\pm\, iw(K)$ son los únicos autovalores de la matriz $-k_0^2 dI + A$, de donde se deduce que $\lambda = i$ y ϕ son, respectivamente, un autovalor y el autovector correspondiente de la matriz $-k_0^2 dI + A - iw(K)I$. Por lo tanto, se infiere que el espacio nulo del operador L está formado por funciones de la forma ϕe^{iz}. Resulta claro que el núcleo de L es bidimensional. Denotando la parte real y la parte imaginaria de un número complejo z, respectivamente por $\Re(z)$ e $\Im(z)$; tenemos que, como las funciones linealmente independientes, $\Re(\phi e^{iz})$ e $\Im(\phi e^{iz})$, satisfacen la ecuación $LU = 0$, éstas tienen que generar el núcleo de L. Además, no se pierde generalidad si se supone que $\|\phi\| = 1$ y que las funciones generadoras del núcleo son

$$\Phi_1 = \Re(\phi e^{iz}) \quad y \quad \Phi_2 = -\Im(\phi e^{iz}) = \frac{d\Phi_1}{dz}. \tag{3.12}$$

Sea $N(L)$, el núcleo de L, y sea M su complemento ortogonal en Y, de tal manera que $Y = N(L) \oplus M$, donde $\oplus$ denota la suma directa de espacios vectoriales, y sea L^*, el operador adjunto de L con respecto al producto escalar (3.9), específicamente

$$L^*V = k_0^2 dI \frac{d^2V}{dt^2} + w(K)\frac{dU}{dz} + A^T U = 0\,, \tag{3.13}$$

donde A^T, es la matriz transpuesta de la matriz A. Claramente, el núcleo de L^*, es bidimensional y si $\Psi_1(z)$ y $\Psi_2(z)$ generan el núcleo de L^*, entonces se cumplen las siguientes igualdades:

$$<\Phi_i, \Psi_j> = \int_0^{2\pi} \Phi_{i1}\Psi_{j1} + \Phi_{i2}\Psi_{j2}\, dz = \begin{cases} 1 & si \quad i \neq j \\ 0 & si \quad i = j \end{cases}.$$

Recapitulando, tenemos que el problema planteado se ha reducido a la búsqueda de soluciones 2π–periódicas de la ecuación

$$k_0^2 dI \frac{d^2U}{dt^2} - w\frac{dU}{dz} + G(U) = 0 \tag{3.14}$$

en la forma $U = col\ (\bar{N}, \bar{P}) + \alpha[\Phi_1(z) + \eta(z)]$, donde la función G denota los términos de reacción del sistema, α es un parámetro escalar de perturbación, $\Phi_1 \in N(L)$ y $\eta \in N(L)^{\perp}$. Sustituyendo esta expresión para U en la ecuación (3.14) obtenemos

$$k^2 d\alpha[\Phi_1'' + \eta''] - w\alpha[\Phi_1' + \eta'] + G(col(\bar{N}, \bar{P}) + \alpha[\Phi_1 + \eta]) = 0,$$

donde los apóstrofes denotan las derivadas con respecto a z. Ahora, reemplazando k^2 por $k_0^2 + \rho$ y w por $w(K) + \sigma$, después de agrupar y reordenar términos y tomar en cuenta que

$$k_0^2\ d\alpha\Phi_1'' - w(K)\alpha\Phi_1' + \alpha A\Phi_1 = 0$$

$$k_0^2\ d\alpha\eta'' - w\alpha(K)\eta' + \alpha A\eta = L\eta$$

nos queda

$$\alpha L\eta + \rho d\alpha[\Phi_1'' + \eta_1''] - \sigma\alpha[\Phi_1' + \eta'] + G(col(\bar{N}, \bar{P}) + \alpha[\Phi_1 + \eta]) - \alpha A[\Phi_1 + \eta] = 0,$$

que reescribimos como:

$$L\eta + \rho d[\Phi_1'' + \eta_1''] - \sigma[\Phi_1' + \eta'] + \alpha h[\Phi_1 + \eta]) = 0, \qquad (3.15)$$

donde, $\alpha h[\Phi_1 + \eta] = \frac{1}{\alpha}(G(col(\bar{N}, \bar{P}) + \alpha[\Phi_1 + \eta]) - \alpha A[\Phi_1 + \eta])$. Ahora tomando en cuenta la ecuación (3.15) generamos las siguientes condiciones:

$$<\rho d[\Phi_1'' + \eta_1''], \Psi_1> - <\sigma[\Phi_1' + \eta'], \Psi_1> + \alpha <h[\Phi_1 + \eta]), \Psi_1> = 0 \qquad (3.16)$$

y

$$<\rho d[\Phi_1'' + \eta_1''], \Psi_2> - <\sigma[\Phi_1' + \eta'], \Psi_2> + \alpha <h[\Phi_1 + \eta]), \Psi_2> = 0. \qquad (3.17)$$

Cuando las ecuaciones (3.16) y (3.17) se cumplen, la solución de la ecuación (3.15) satisface:

$$\eta + L^{-1}\rho d[\Phi_1'' + \eta_1''] - \sigma L^{-1}[\Phi_1' + \eta'] + \alpha L^{-1}h[\Phi_1 + \eta] = 0. \qquad (3.18)$$

Las ecuaciones (3.16), (3.17) y (3.18) constituyen el llamado sistema de ecuaciones de Liapunov-Schmidt para la solución de la ecuación (3.14). Para la aplicación del método de Liapunov-Schmidt consideramos la aplicación

$$H(\eta,\rho,\sigma,\alpha) = col(H_1, H_2, H_3).$$

donde, H_1 es el miembro izquierdo de la ecuación (3.18), H_2 es el miembro izquierdo de la ecuación (3.16) y H_3 es el miembro izquierdo de la ecuación (3.17). Resulta claro que $H : Y \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to X \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es una función analítica y cumple con ser $H(\Phi_1, 0, 0, 0) = (0, 0, 0)$. La derivada de Fréchet de H en $(\Phi_1, 0, 0, 0)$ es el operador T dado por la matriz:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial \eta} & \frac{\partial H_1}{\partial \rho} & \frac{\partial H_1}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial H_2}{\partial \eta} & \frac{\partial H_2}{\partial \rho} & \frac{\partial H_2}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial H_3}{\partial \eta} & \frac{\partial H_3}{\partial \rho} & \frac{\partial H_3}{\partial \sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L^{-1}d\Phi_1'' & -L^1\Phi_1' \\ 0 & d<\Phi_1'', \Psi_1> & <\Phi_1', \Psi_1> \\ 0 & d<\Phi_1'', \Psi_2> & d<\Phi_1', \Psi_2> \end{pmatrix}.$$

Usando las relaciones definidas en (3.12) puede verse que $\Phi_1(z) = \Phi\cos(z)$ y $\Phi_2(z) = \Phi_1'(z)$. También puede observarse que $\Phi_1'(z) = -\Phi_1(z)$. De modo que, resulta $<\Phi_1'', \Psi_2> = -<\Phi_1, \Psi_2> = 0$, $<\Phi_1', \Psi_2> = <\Phi_2, \Psi_2> = 1$ y $<\Phi_1, \Psi_1> = 1$. De manera que, $det(T) =- d<\Phi_1'', \Psi_1><\Phi_1', \Psi_2> = d$. Como $d > 0$, entonces el operador matricial T es invertible y usando el Teorema de la función implícita se puede garantizar la existencia de funciones $\eta(\alpha)$, $\rho(\alpha)$, $\sigma(\alpha)$ tales que $H(\eta(\alpha), \rho(\alpha), \sigma(\alpha)) = 0$. Por lo tanto, estas funciones constituyen la solución del problema planteado. ■

4. Referencias

[1] Cavani, M. and Farkas, M. (1994). "*Bifurcations in a Predator-Prey Model with Memory and Diffusion: I Andronov-Hopf Bifurcation*". Acta Math. Hungar., 63(3), 213-229.

[2] Cavani, M. and Farkas, M. (1994). "*Bifurcations in a Predator-Prey Model with Memory and Diffusion: II Turing Bifurcation*". Acta Math. Hungar.,63(4), 375-393.

[3] Crandall, M. G. and Rabinowitz, P. H. (1973) "*Bifurcation, Perturbations of Simple Eigenvalues and Linearized Stability*." Arch. Rat. Mech. Anal., 52, 161-180.

[4] Gopalsamy K. and Aggarwala, B. D. (1981). *"The Logistic Equation with a Diffusionally Coupled Delay"*. Bulletin of Mathematical Biology, 43(2), 125-140.

[5] Hsu, S. B.; Hubbell, S. P. and Waltman, P. (1978). *"A Contribution to the Theory of Competing Predators"*. Ecological Monographs, 48, 337-349.

[6] Lizana, M. and Niño, L. (1997). *"Homoclinic Bifurcation in a Predator-Prey Model"*. Acta Math. Hungar.,78(4), 234-245.

[7] May, R. M. (1973). *"Stability and Complexity in Models Ecosystems"*. Princeton N. J.: Princeton Univ. Press.

[8] Marsden, J. E. and McCracken, M. (1976). *"The Hopf Bifurcation and its Applications"*. New York: Springer.

[9] Okubo, A. (1980). *"Diffusion and Ecological Problèms: Mathematical Models"*. Springer: Berlin.

[10] Protter, M. H. and Weinberger, H. F. (1970) *"Maximun Principles in Differential Equations"*. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice Hall.

[11] Sattinger, H. D. (1973). *"Topics in Stability and Bifurcations Theory"*. Lectures Notes in Mathematics, 762, Springer-Verlag: Berlin.

[12] Smoller, J. (1983). *"Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations"*. Springer-Verlag: New York.

[13] Svirezhev, Y. M. and Logofet., D. O. (1983). *"Stability of Biological Communities"*. Mir: Moscow.

[14] Williams, S. A. and Chow, P. L. (1978). *"Nonlinear Reaction Diffusion Models for Interacting Populations"*. J. Math. Anal. Applic., 62, 157-169.

Mario Cavani
Universidad de Oriente, Escuela de Ciencias
Departamento de Matemáticas, Cumana 6101
Venezuela.