

# CONSTRUCCIÓN DE ATRACTORES MEDIANTE GRÁFICAS DE RETARDO

*Francisco Pasquel Carbajal*

*En esta exposición presentaremos una introducción a las principales ideas que permiten una construcción de atractores de sistemas dinámicos, utilizando para tal efecto, las denominadas gráficas de retardo establecidas en base a series de tiempo. Este método es de especial importancia en estudios de sistemas, en los cuales es muy difícil establecer las ecuaciones que rigen el proceso en estudio; teniendo muchas veces sólo como base para el análisis, datos obtenidos mediante métodos experimentales.*



El análisis de atractores de un sistema dinámico, exige utilizar una matemática especial y variada en muchos aspectos.

Si por ejemplo analizamos las Ecuaciones de Lorenz [13] [14], que se establecieron para modelar procesos climáticos, observamos que consisten de tres ecuaciones diferenciales no lineales, que buscan representar la evolución del clima dentro de un espacio de fase de tres dimensiones. Dicho sistema dinámico conduce a un atractor (Atractor de Lorenz) que consiste de lazos semejantes a las alas de mariposa; tiene una naturaleza fractal y por lo tanto, presenta características matemáticas muy singulares y complejas. En cada una de las alas del atractor encontramos representado un posible estado de la atmósfera; por ejemplo, tiempo húmedo en el ala izquierda y seco en la derecha, luego por ejemplo, si las condiciones iniciales son (como se indica en la figura 1), la marca en el punto A de la izquierda; la evolución seguirá la trayectoria que se mantiene en una misma ala, esto es el tiempo será húmedo; pero una pequeña perturbación que cambie las condiciones iniciales, estando en una situación atmosférica representada por el punto B, nos lleva a la trayectoria que evoluciona hacia el ala derecha y el tiempo entonces será seco.

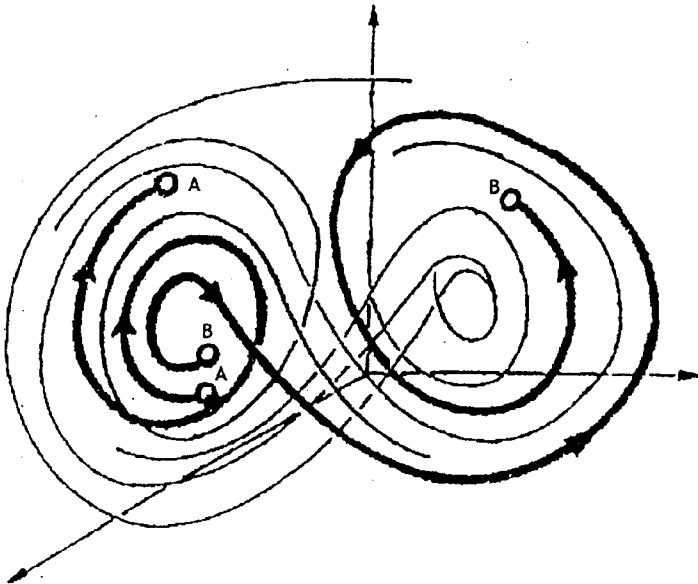
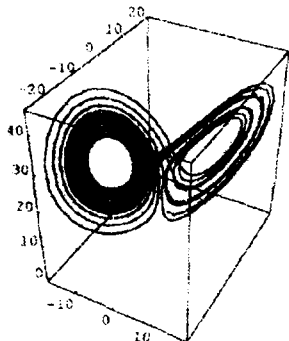


Figura 1.

El atractor de Lorenz como ventos, es muy sensible a las condiciones iniciales revelando el accionar de un sistema caótico. Tiene naturaleza fractal (atractor extraño) y su dimensión puede ser calculada .

```
ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t],y[t],z[t]} /. NDSolve[{x'[t] ==
-10 (x[t] - y[t]),y'[t] == -x[t] z[t] + 28.0 x[t]
-y[t],x'[t] == x[t] y[t] - 8/3 z[t], x[0] == 1 , z[0] == 10},
{x, y, z}, {t, 0, 20}, MaxSteps -> 3000 ]],
{t,0,20}, PlotPoints -> 1000]
```



-Graphics3D-

Plot3D

```
ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t],y[t],z[t]} /. NDSolve[{x'[t] ==
-10 (x[t] - y[t]),y'[t] == -x[t] z[t] + 28.0 x[t]
-y[t],x'[t] == x[t] y[t] - 8/3 z[t], x[0] == y[0] == 1 ,
z[0] == 10},{x, y, z}, {t, 0, 20}, MaxSteps -> 3000 ]],
{t,0,20}, PlotPoints -> 1000,ViewPoint->{0.768,-0.831,4.798}]
```

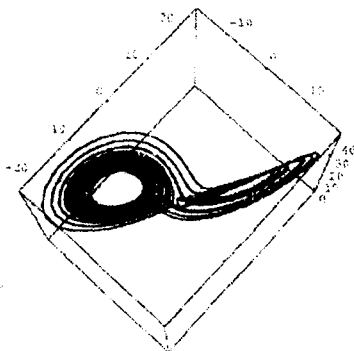


Figura 2

El sistema de Lorenz tiene la siguiente estructura

$$x' = \sigma (y - x)$$

$$y' = r x - y - xz$$

$$z' = xy - bz$$

Donde  $\sigma$ ,  $r$  y  $b$  son parámetros positivos. Los valores tradicionales que se asignan a estos parámetros son  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$  y  $r = 28$ .

Usando software especializado como Mathematica, es posible hacer un análisis numérico, que nos permita apreciar el comportamiento de dicho sistema como lo indicamos en la figura 2.

Y apreciar propiedades básicas, como por ejemplo el comportamiento del eje Z, como un conjunto invariante, de tal forma que, todas las trayectorias que se originan en dicho eje, permanecerán en él e irán tendiendo hacia el origen, como se aprecia en la figura 3.

```
ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t],y[t],z[t]} /. NDSolve[{x'[t] ==
-3 (x[t] - y[t]),y'[t] == -x[t] z[t] + 26.5 x[t]
- y[t],z'[t] == x[t] y[t] - z[t], x[0] == y[0] == 0 , z[0] == 10},
{x, y, z}, {t, 0, 20}, MaxSteps -> 3000 ]],
{t,0,20}, PlotPoints -> 1000]
```

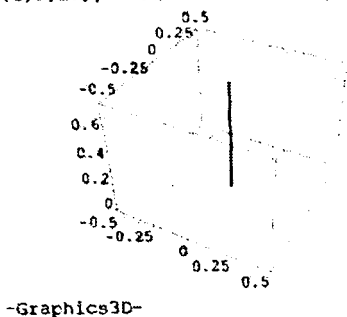


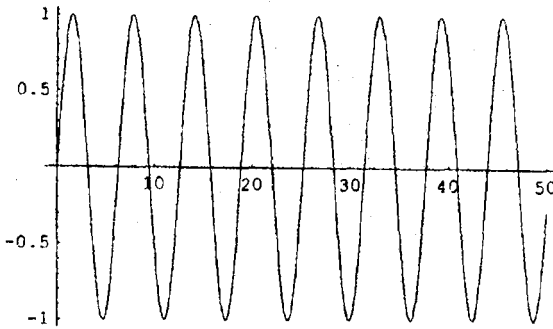
Figura 3.

Existen situaciones en donde no se conocen las ecuaciones que rigen la dinámica de un proceso, pero se tienen muchos datos obtenidos mediante procedimientos experimentales; en tales casos una herramienta de especial

utilidad la proporcionan las denominadas Series de Tiempo y las gráficas de retardo.

En términos sencillos una *Serie de Tiempo* es una gráfica de algún aspecto cuantitativo del proceso (velocidades, temperaturas, etc.) versus el tiempo. Por ejemplo si suponemos que los datos experimentales tienen una estructura de tipo sinusoidal una gráfica de Serie de Tiempo, será como la indicada en la figura 4.

```
ParametricPlot[{t, Sin[t]}, {t, 0, 50}]
```



Graphics -

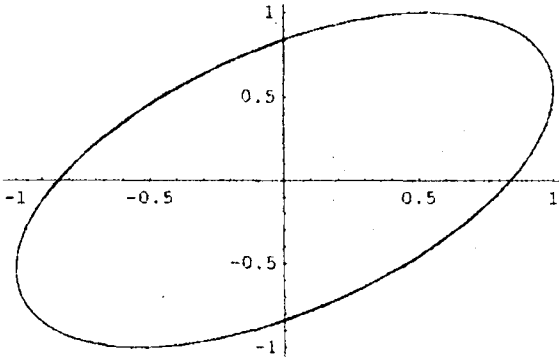
Figura 4.

Supongamos que la figura indicada nos está mostrando una serie de mediciones de temperaturas correspondientes a un cierto experimento; luego estamos indicando en la gráfica una serie de temperaturas  $S(t)$  versus el tiempo.

Si empleamos un método de analogías, esto es si tratamos de predecir o visualizar como se comportará el sistema, mirando en el pasado y analizando comportamientos análogos, podremos tener una idea de cómo será la dinámica del sistema en un espacio de fases. Siguiendo con el ejemplo que

estamos analizando; si graficamos pares ordenados de la forma:  $(S(t), S(t - T))$ , donde  $T$ , es un "Tiempo de retardo", digamos por ejemplo de  $T = 1$ , estaremos estableciendo una "Gráfica de retardo" en dos dimensiones, como la indicada en la figura 5.

```
ParametricPlot[{Sin[t], Sin[t - 1]}, {t, 0, 50}]
```



- Graphics -

Figura 5.

Esta gráfica nos estaría indicando un comportamiento periódico de la dinámica del sistema.

Luego, en general una gráfica de retardo nos puede permitir construir y apreciar como se comportará el sistema en el espacio de fases.

Pero el asunto no es tan simple; podríamos tener gráficas de retardo que no nos proporcionen una visión clara de lo que realmente está pasando en la dinámica del sistema; como por ejemplo, gráficas en las cuales tengamos puntos de intersección en las trayectorias del sistema, como lo que podemos apreciar en una gráfica de retardo, para un valor de  $T = 0.5$ , realizada en base a una serie de tiempo, de impedancia eléctrica versus tiempo, desarrollada para un experimento de entomología [1] y que apreciamos en la figura 6.

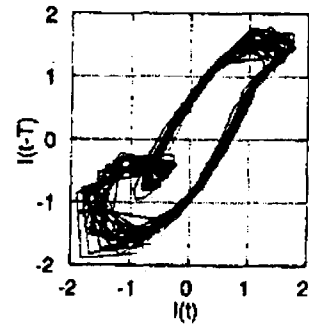
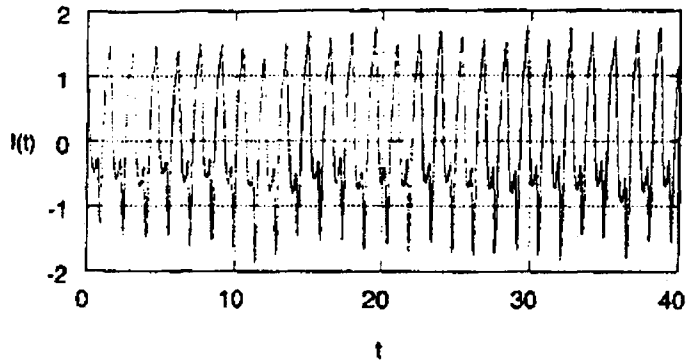


Figura 6.

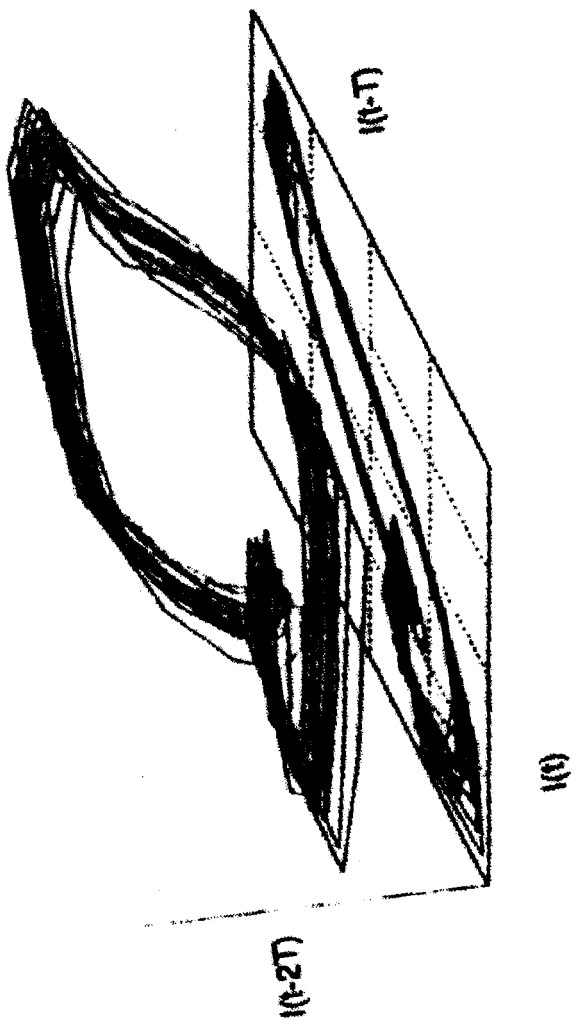


Figura 7.



Este problema se puede solucionar, si aumentamos una dimensión para la gráfica de retardo, construyendo coordenadas de la forma  $(S(t), S(t - T), S(t - 2T))$ , con lo que obtendremos una visión adecuada del atractor del sistema dinámico y que podemos apreciar en la figura 7.

En general podemos establecer una Gráfica de retardo en  $m$  dimensiones considerando ahora como “*Coordenadas de retardo*”:  $(S(t), S(t - T), S(t - 2T), \dots)$ , establecidas para cada  $t$  de la serie de tiempo.

Los atractores más complicados y de características caóticas, requieren el empleo de una dimensión mayor en estas coordenadas de retardo.

Si volvemos ahora a nuestro primer ejemplo, que era el Sistema de Lorenz y aplicamos las ideas que hemos expuesto, tendremos que, puesto que en este caso si conocemos las ecuaciones que rigen el sistema dinámico, no necesitamos de recopilar datos experimentales para la obtención de la serie de tiempo, bastará usar nuevamente *mathematica*, para obtener la serie de tiempo correspondiente a  $X(t)$  y que indicamos en la figura 8.

Esta serie de tiempo conduce a una gráfica de retardo desarrollada en tres dimensiones para un tiempo de retardo  $T = 0.1$ , indicada en la figura 9; que nos proporciona una visión clara del atractor de Lorenz y que podemos comparar con los resultados obtenidos en la figura 2 de este atractor, con los otros métodos ya indicados.

El porqué las cosas funcionan tal como las estamos describiendo, se basan principalmente en consecuencias del *Teorema de Incrustación de Whitney* [6].

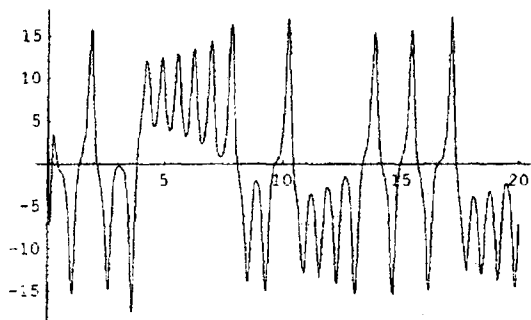
En primer lugar, hemos señalado que muchas veces vamos a trabajar en base a mediciones del sistema, obtenidas mediante métodos experimentales; luego, en la construcción que realicemos del atractor y las funciones que debemos establecer para formalizar esta construcción, deberá apreciarse una característica que vamos a denominar “*genérica*” en el sentido que dichas funciones mantengan una estabilidad en su accionar funcional para pequeñas perturbaciones.

Por otro lado, para el lector familiarizado con conceptos de Topología diremos que una incrustación  $f$ , será una función continua, inyectiva que parte de un conjunto compacto a  $\mathbb{R}^m$ . Lo que en cierta manera concuerda con el significado intuitivo de la palabra incrustar. El número  $m$ , será llamado la dimensión de la incrustación.

```

Plot[Evaluate[x[t] /. NDSolve[{x'[t] == -10 (x[t] - y[t]), y'[t]
    == -x[t] z[t] + 28.0 x[t] - y[t], z'[t] == x[t] y[t] -  $\frac{8 z[t]}{3}$ 
    , x[0] == 10, y[0] == -10, z[0] == 100}], {x, y, z}], {t, 0, 20}, MaxSteps -> 3000]], {t

```



- Graphics -

Figura 8.

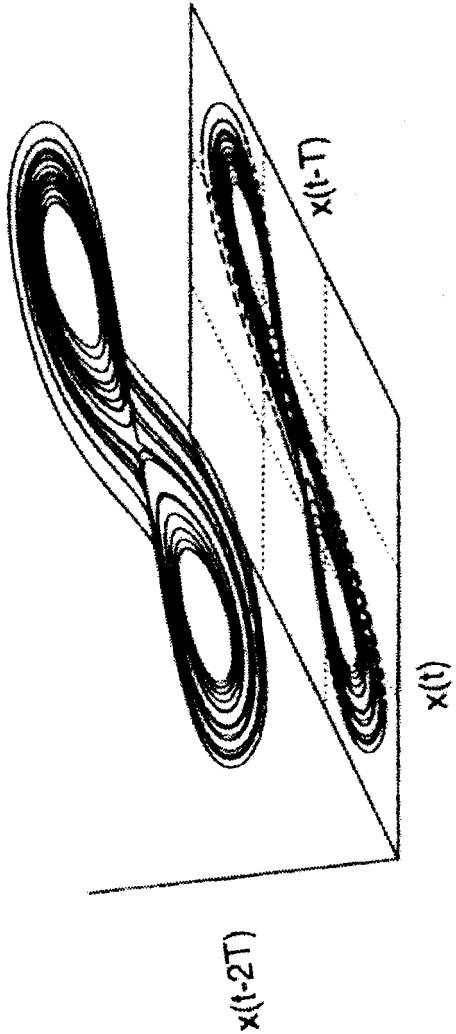


Figura 9.

En la figura 5 la órbita periódica del sistema está incrustada en  $\mathbb{R}^2$ ; en la figura 6, se falla al realizar una incrustación en  $\mathbb{R}^2$  (tenemos trayectorias del sistema que se “autointersectan”; coincidiendo en la gráfica, dos puntos distintos, en un mismo punto), pero si se tiene éxito al realizarla en  $\mathbb{R}^3$ , lo que apreciamos en la figura 7.

Luego, supongamos que  $\mathbb{R}^n$  es el espacio de fase de un sistema dinámico y que las trayectorias del sistema son atraídas hacia una *variedad - K dimensional A*; asumamos que tenemos un camino para hacer  $m$  medidas independientes del sistema para un tiempo dado, luego cada estado del sistema nos determinará un vector en  $\mathbb{R}^m$ . Pensemos el proceso de medida para diferentes tiempos, como una función  $f$  de  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , luego tenemos un Teorema [1] consecuencia del Teorema de Whitney, que nos afirma que si dicha función  $f$  es genérica;  $f(A)$  nos representará todos los estados establecidos inicialmente en la variedad A; esto es:

Si A una variedad K dimensional en  $\mathbb{R}^n$  y si  $m > 2k$  y  $f$  de  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es genérica, entonces  $f$  será inyectiva sobre A.

Esto lo relacionamos con las coordenadas genéricas de retardo mediante el Teorema de Takens [1] el cual en palabras simples nos afirma, que si el atractor del sistema dinámico tiene dimensión K, entonces para coordenadas genéricas de retardo la dimensión de la incrustación será a lo más  $2k + 1$ .

Finalmente para atractores extraños (de naturaleza fractal) si se determina su dimensión mediante el sistema de conteo por cajas [5] (técnica de medición empleada en la geometría fractal) y es igual a K, tenemos también un Teorema Análogo al anterior [1] que nos asegurará la inyectividad de la incrustación para  $m > 2k$ .

Actualmente el análisis de las series de tiempo y gráficas de retardo se presentan como una de las principales herramientas en el estudio de fenómenos físicos en los cuales es muy difícil establecer las ecuaciones que rigen el comportamiento de la dinámica de un sistema. Uno de los campos que está en pleno desarrollo y que reviste especial importancia por las aplicaciones que presenta y por permitir una ventana hacia la comprensión de la dinámica del Universo, es el análisis del Plasma.

A modo de ejemplo presentamos las ideas expuestas; en estudios sobre la dinámica del plasma [8],[10] y que indicamos en las figuras 10 y 11 con las series de tiempo respectivas.

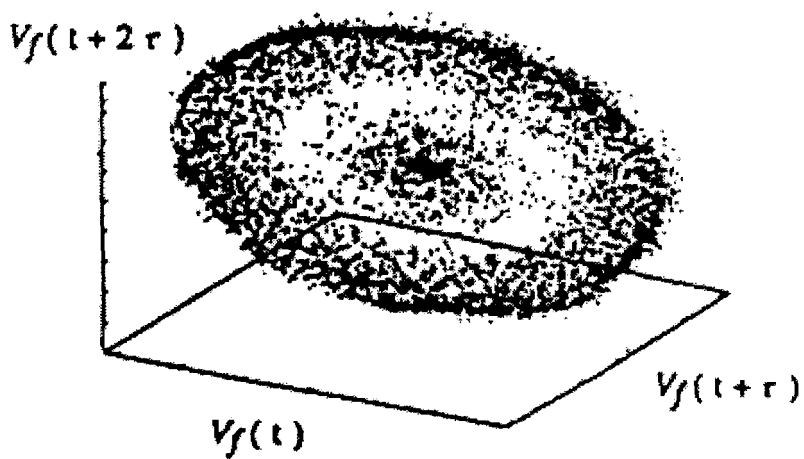
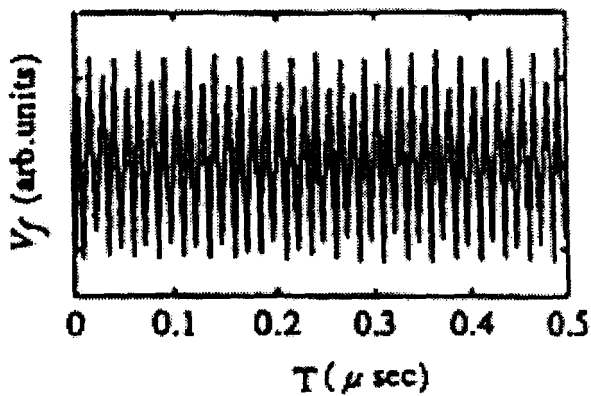


Figura 10.

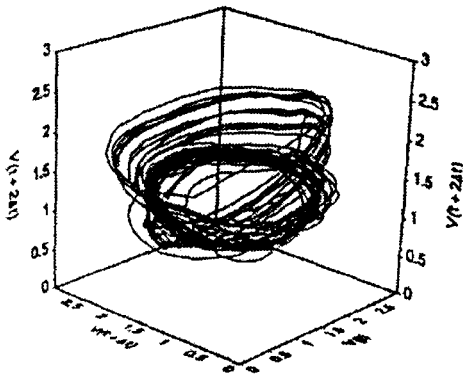
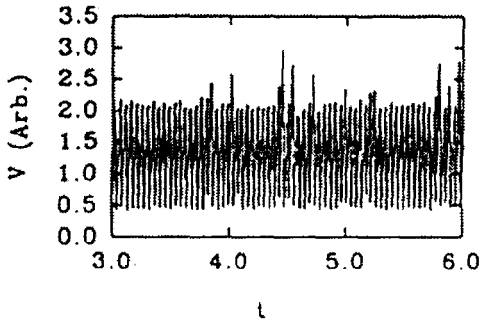


Figura 11.

## Referencias

- [1] Alligood, K. T.; Sauer, T. D. y Yorke, J. A. "*Chaos An Introduction to Dynamical Systems*".
- [2] Crilly, A. J. "*Fractals and chaos*". A.J. Crilly, R.A. Earnshaw, H. Jones.

- [3] Devaney, R. L. "*Chaos, fractals, and dynamics : Computer experiments in mathematics*". Robert L. Devaney.
- [4] Gaponov-Grekhov, A. V. "*Nonlinearities in action; oscillations, chaos, order, fractals*". A.V. Gaponov-Grekhov. M.I. Rabinovich.
- [5] Gerald, A. E. "*Measure, topology, and fractals geometry*". Gerald, A. Edgar.
- [6] Golubitsky, M. y Guillemin, V. "*Stable Mappings and their Singularities*".
- [7] Gray, A.; Mezzino, M. y Pinsky, M. A. "*Introduction to Ordinary Differential Equations with Mathematica*".
- [8] Hayashi, N. y Kawai, Y. "*Observation of bifurcation phenomena in an electron beam plasma system*".
- [9] Hubbard, J. H. y West, B. H. "*Differential Equations : A Dynamical Systems Approach*".
- [10] Lianxi Ma, Long Wang. "*Experimental observations of intermittent route to chaos in a plasma*".
- [11] Monroy Olivares, C. "*Teoría del Caos*".
- [12] Perko, L. "*Differential Equations and Dynamical Systems*".
- [13] Sametband, M. J. "*Entre el orden y el caos : La complejidad*".
- [14] Sparrow, Colin. "*The Lorenz equations; bifurcations, chaos, and strange attractors*".
- [15] Torreblanca Quiroz, H. "*Proyecto de Investigación en Plasma*". PUCP.
- [16] Verhulst, F. "*Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*".
- [17] Wiggins, S. "*Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*".

Francisco Pasquel Carbajal  
[fpasque@pucp.edu.pe](mailto:fpasque@pucp.edu.pe)