Pro Mathematica Vol. XIV, Nos. 27-28, 2000

FRACTALES

Flor de María ***Aceff Sánchez***

Los objetos en la naturaleza casi nunca tienen formas muy regulares (las nubes no son esferas, las montañas no son conos, etc.). La complejidad de las formas naturales difiere no sólo en grado sino también en tipo de las formas de la geometría ordinaria. Para describir tales formas, Benoit Mandelbrot concibió y desarrolló una geometría nueva, la geometría de las formas fractales.

Benoit Mandelbrot

Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México.

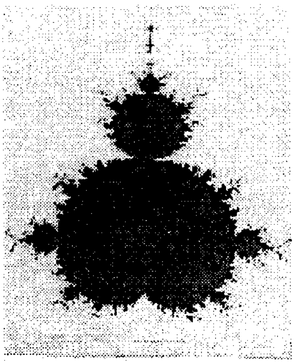
Muchos patrones de la naturaleza son tan irregulares y fragmentados que exhiben muchos niveles de complejidad vistos con la geometría usual, a la cual de ahora en adelante llamaremos Euclidiana.

La existencia de estos patrones nos reta a estudiar esas formas que con la geometría usual parecen ser sin forma, es decir a investigar la morfología de lo "*amorfo*".

Respondiendo a este reto Mandelbrot concibió y desarrolló una nueva geometría de la naturaleza e implementó su uso en diversos campos. Esta geometría describe muchos de los patrones irregulares y fragmentados que nos rodean, y nos llevan a nuevas teorías, identificando una familia de formas que les llamó *fractales*. Los fractales más útiles involucran una probabilidad estadística tanto de sus regularidades como irregularidades. También las formas descritas aquí pueden escalarse (es decir, amplificarse o reducirse), implicando que el grado de sus irregularidades y/o fragmentación es el mismo en todas las escalas.

En los últimos años, un amplio rango de estructuras complejas de interés para los científicos, ingenieros y médicos han sido caracterizadas cualitativamente usando la idea de una dimensión *fractal*: una dimensión que corresponde de una manera única a la forma geométrica que se estudia, y que con frecuencia no es un entero. La clave para este progreso es el reconocimiento de que muchas estructuras aleatorias obedecen tanto a una simetría como a un encogimiento dados por estructuras regulares. Esta "simetría a escala" tiene la implicación de que los objetos parecen el mismo en muchas escalas de observación diferentes. Los no especialistas también están algo familiarizados con los objetos fractales. Todos hemos visto objetos fractales - probablemente en la niñez. Quizá hayamos visto los cristales de la nieve que tienen el mismo patrón, o quizás hayamos observado con detenimiento algunos árboles y hayamos visto que cada rama es similar a todo el árbol. De hecho para "*ver*" cualquier cosa - fractal o no - requerimos que las células nerviosas en la retina del ojo envíen una señal, y estas células nerviosas de la retina son objetos fractales.

Un fractal es una forma geométrica que es compleja y detallada en estructura en cualquier nivel de amplificación. Con frecuencia los fractales son autosimilares, es decir, tienen la propiedad de que cada porción pequeña del fractal puede verse como una réplica reducida del entero.



Conjunto de Mandelbrot. Este conjunto es un fractal. Podemos observar que la figura grande se repite en distintos tamaños.

El nombre de fractal lo tomó Mandelbrot del adjetivo en latín "*fractus*", que proviene del verbo "*frangere*" que significa romper, crear fragmentos irregulares, por lo que este nombre es apropiado para nuestras necesidades, ya que, además de fragmentar (como en las palabras fracción o refracción) "fractus" también significa irregular.

Algunos objetos fractales son curvas o superficies, otros son polvos disconexos, y aún otros son cuerpos de formas horribles que no están en buenos términos ni con las ciencias ni con las artes.

Muchas de estas ilustraciones son de formas que nunca se habían considerado, pero otras representan construcciones conocidas con anterioridad.

Mientras que la geometría fractal se inició en 1975, muchas de sus herramientas y conceptos se habían desarrollado con anterioridad por diversas razones diferentes a las de Mandelbrot.

"*Fractal*" es una palabra en la cual está subyacente una inmensa clase de objetos, que han jugado un papel histórico en el desarrollo de las matemáticas puras. Una gran revolución de ideas separa a las matemáticas del siglo 19 de las matemáticas modernas del siglo 20. La matemática clásica tiene sus raíces en las estructuras geométricas (de Euclides) regulares y la dinámica continua de Newton. Las matemáticas modernas empiezan con la Teoría de Conjuntos de Cantor y la curva de Peano que llena el espacio.

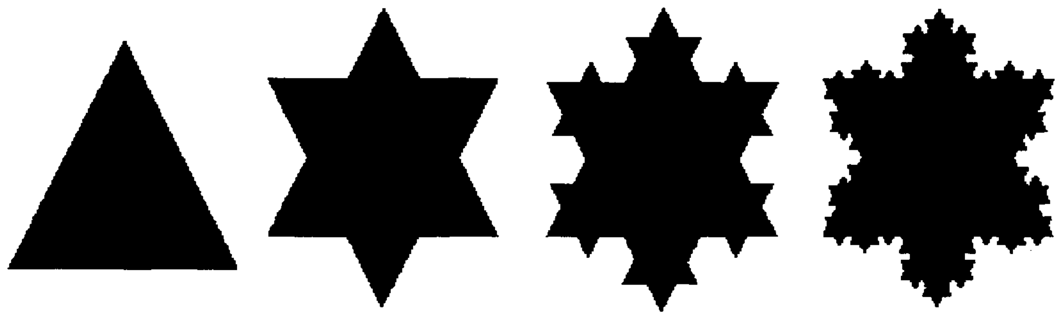
Históricamente la revolución fue forzada por el descubrimiento de estructuras que no encajaban en los patrones de Euclides y Newton. Estas estructuras fueron pensadas como "patológicas", como una galería de monstruos, emparentadas con la pintura cubista y la música atonal que fueron las bases para establecer estándares de gusto en las artes al mismo tiempo. Los matemáticos que crearon a esos monstruos son recordados como importantes ya que mostraron al mundo que las matemáticas puras contienen una riqueza de posibilidades que va más allá de las estructuras simples que veían en la naturaleza. Las matemáticas del siglo 20 florecieron en la creencia de que habían trascendido completamente las limitaciones impuestas por sus orígenes naturales.

La naturaleza le ha jugado una broma a los matemáticos. Los matemáticos del siglo 19 pudieron haber tenido mucha imaginación, pero la naturaleza tiene más. Las mismas estructuras patológicas que los matemáticos inventaron para romper la pérdida del naturalismo del siglo 19 se convirtieron en objetos familiares alrededor nuestro. En breve, hemos confirmado la observación de Blaise Pascal, que establece que la imaginación es rebasada por la naturaleza.

La geometría fractal no es una aplicación directa de las matemáticas del siglo 20. Es una nueva rama que nació con la crisis que surgió en 1875 cuando du Bois Reymond reportó que Weirstrass había construido una función continua no diferenciable, la crisis duró aproximadamente hasta 1925, teniendo como actores principales a Cantor, Peano, Lebesgue y Hausdorff. Estos nombres al igual que Besicovitch, Bolzano, Cesàro, Koch, Osgood, Sierpinski y Urysohn, no se encuentran en el estudio empírico de la naturaleza, pero el trabajo de estos gigantes ha trascendido.

Además la geometría fractal revela que algunos de los capítulos más austeros de la matemática tienen una cara escondida: un mundo de belleza plástica insospechada hasta ahora.

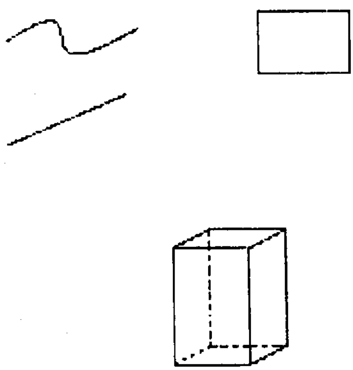
Los conjuntos fractales se definen de una manera rigurosa (como todo en matemáticas), pero la expresión "*fractal natural*" designará un patrón natural que usualmente representaremos con un conjunto fractal. Por ejemplo, las curvas Brownianas son conjuntos fractales, y el movimiento browniano (en física) es un fractal natural.



Construcción del Copo de Nieve.

Un ejemplo de un fractal es el copo de nieve construido tomando un triángulo equilátero y erigiendo triángulos equiláteros más pequeños en el tercio de en medio de los lados de manera progresiva. Teóricamente, el resultado debe ser una figura de área finita pero con perímetro de longitud infinita, el cual consiste de un número infinito de vértices. En términos matemáticos, esta curva (el perímetro de la figura) no puede ser diferenciable en cualquiera de sus puntos. Es decir, de manera intuitiva que la curva no es suave.

En geometría utilizamos la palabra *dimensión* para decir cuántos parámetros necesitamos para medir un objeto. Así, para medir una curva, sólo necesitamos un parámetro, que es la longitud; para medir un área necesitamos dos parámetros (largo y ancho, o radio y ángulo); para medir un volumen necesitamos tres parámetros (largo, ancho y alto).



Una curva tiene dimensión euclidiana 1, mientras que una superficie y un cuerpo con volumen tienen dimensión euclidiana 2 y 3 respectivamente.

Mandelbrot adoptó una definición más abstracta de dimensión que la usada en geometría Euclidiana, diciendo que la dimensión de un fractal debe usarse como un exponente cuando se mide su tamaño. El resultado es que un fractal no puede considerarse que tiene dimensión uno, dos o cualquier otro número entero, sino un número fraccionario. El fractal de la curva del copo de nieve tiene una dimensión de 1.2618. El concepto de dimensión fractal juega un papel importante las investigaciones sobre fractales.

La geometría fractal no es sólo un desarrollo abstracto. La línea costera, si se mide hasta su más pequeña irregularidad, podría tender a una longitud infinita al igual que el copo de nieve. Mandelbrot ha sugerido que montañas, nubes, agregados, conglomerados de galaxias y otros fenómenos naturales son también fractales en la naturaleza, y la aplicación de la geometría fractal en las ciencias se ha vuelto un campo de investigación en expansión. Además la belleza de los fractales los ha convertido en un elemento clave en las gráficas por computadora. Los fractales también han sido utilizados para comprimir imágenes en computadora tanto fijas como de vídeo. En 1987 Michael F. Barnsley descubrió la transformada fractal la cual detecta automáticamente códigos fractales de imágenes del mundo real (fotografías digitalizadas). Este descubrimiento es el que llevó a la compresión de imágenes fractales, usadas en gran variedad de aplicaciones de multimedia y otras aplicaciones basadas en imágenes de computadora.

Fractales no aleatorios

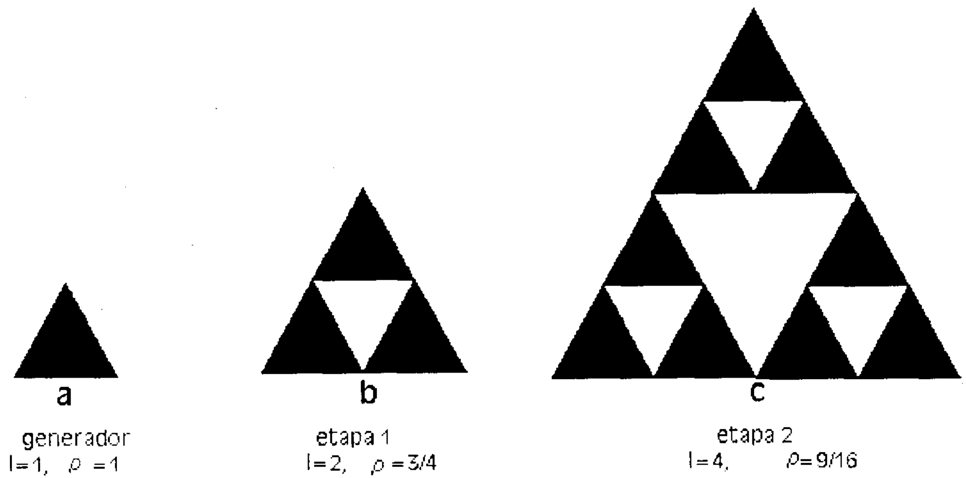
Los fractales pueden ser de dos categorías, aleatorios y no aleatorios. Los fractales en Física son aleatorios, pero es instructivo primero entender algunos ejemplos de fractales no aleatorios que han sido muy estudiados.

Empezaremos con el triángulo de Sierpinski. Simplemente iteraremos (repetiremos) una *regla de crecimiento*, al igual que un niño puede armar un castillo con bloques. Nuestra unidad básica es una figura triangular como la de la figura 1, la cual tomaremos como unidad de masa $M = 1$ y longitud de los lados $L = 1$.

El triángulo de Sierpinski está definido operacionalmente como un "proceso de agregación" obtenido por un sencillo proceso iterativo. En la etapa uno, unimos bloques para crear la figura 1b la cual es de masa $M = 3$ y la longitud de los lados $L = 2$. El efecto de la etapa uno es producir una unidad con densidad menor. Si definimos la densidad como

$$d(L) = M(L)/L^2 \tag{1}$$

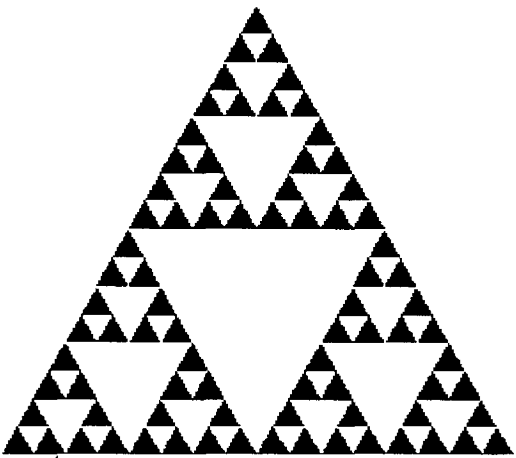
entonces la densidad disminuye de 1 a 3/4 como resultado de la etapa uno. Ahora simplemente iteramos - es decir, repetimos esta regla una y otra vez ad infinitum. Así en la etapa dos ponemos juntos tres de las estructuras de densidad 3/4 construidas en la etapa uno, por lo que hemos construido un objeto



Construcción del Triángulo de Sierpinski.

con densidad $d(3/4)^2$. En la etapa 3, unimos tres objetos construidos en la etapa dos. Continuamos así hasta que se acaben los bloques (si es físico) o hasta que la estructura sea infinita (sí es matemático).

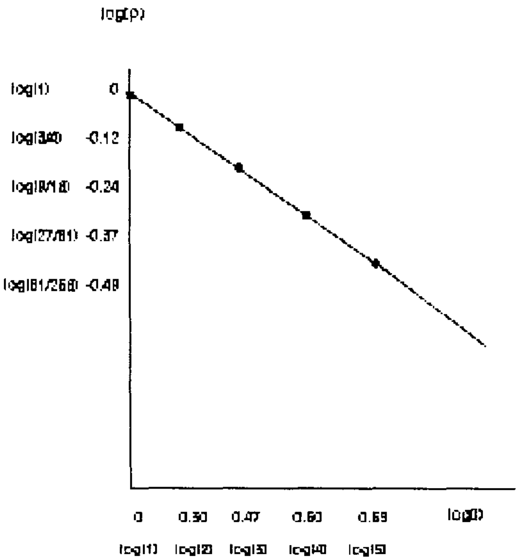
El resultado de la etapa cuatro - con 81 bloques negros y 27+36+48+64 bloques blancos (fig. 1.2a) puede verse en los mosaicos del piso de la iglesia en Anagni, Italia, la cual fue construida en el año 1104. Aunque a este fractal le dio nombre en el siglo XX el matemático polaco Sierpinski, fue conocido ocho siglos antes por todo aquel que iba a la iglesia de esa localidad.



Etapa 4 de la construcción del triángulo de Sierpinski, esta figura puede verse en el piso de la iglesia de Anagni.

Los habitantes de Anagni no tenían papel logarítmico. para graficar en el siglo XII. Si ellos hubieran tenido tal invento, entonces podrían haber graficado la dependencia de d en L. Podrían haber encontrado que

- decrece monótonamente con L, sin límite, así que iterando el número suficiente de veces podemos obtener un objeto de densidad tan pequeña como lo deseemos, y
- decrece respecto a L de una manera predecible decrece de manera de una función de potencias.



Gráfica de log L contra log $M(L)$

La funciones de potencias tienen la forma genérica $y = A\,x^b$ y, como tal tiene dos parámetros, la amplitud A y el exponente b. La amplitud no es de interés intrínseco, porque depende de la elección que hayamos hecho de las definiciones de M y L. El exponente, por otro lado depende del proceso mismo, - es decir, de la regla que hemos seguido para iterar. Diferentes reglas nos llevan a diferentes exponentes. En este ejemplo, $d(L)=L^b$ así que la amplitud es unitaria. El exponente está dado por la pendiente de la recta de la figura 1.2b,

$$\begin{aligned} b &= \textit{pendiente} \\ &= (\log 1 - \log(3/4)) / (\log 1 - \log 2) \\ &= (\log 3/\log 2) - 2 \end{aligned} \tag{2}$$

Finalmente estamos listos para definir la dimensión fractal d_f, por medio de la ecuación

$$M(L) A L^{df} \tag{3}$$

Si sustituimos (3) en (1), obtenemos

$$d(L)=A\,L^{df-2} \qquad (4)$$

comparando (2) y (4), concluimos que el triángulo de Sierpinski es un objeto fractal con dimensión

$$d_f = \log 3/\log 2 = 1.58 \qquad (5)$$

En la geometría clásica (Euclidiana) las formas regulares tienen una dimensión al igual que los espacios donde las incluimos. Por ejemplo, una línea tiene $d = 1$, y un cuadrado $d = 2$. Diremos que el triángulo de Sierpinski tiene una dimensión intermedia entre las dimensiones de una línea y de un área -una dimensión "*fraccionaria*"- de ahí el término *fractal*.

Fractales aleatorios

Los sistemas reales en la naturaleza no se ensamblan como el piso de la iglesia de Anagni -de hecho, los fractales no aleatorios no se encuentran en la naturaleza. La naturaleza exhibe numerosos ejemplos de objetos que no son fractales, pero si hacemos un promedio estadístico de alguna propiedad tal como la densidad, encontramos una cantidad, que disminuye linealmente con la longitud de la escala cuando graficamos en un papel logarítmico. A tales objetos los denominamos fractales aleatorios, para distinguirlos de los fractales geométricos no aleatorios como el ejemplo de la sección anterior.

Los métodos probabilísticos y estadísticos constituyen una base sólida para el análisis de los sistemas naturales, sin embargo estos métodos no sirven para caracterizar el patrón de heterogeneidad de un sistema natural. La geometría fractal promete ser la herramienta necesaria para resolver este problema además de proporcionar información acerca de los procesos que originaron la heterogeneidad de un sistema dado.

Otra ventaja del uso de los parámetros fractales para la descripción de la heterogeneidad de los sistemas naturales, consiste en la posibilidad de describir no sólo las propiedades geométricas estáticas de las estructuras fractales, sino también sus propiedades dinámicas y sus interacciones con el medio exterior.

Para terminar, a continuación presentamos algunos conjuntos y sus dimensiones fractal D y topológica D_T.

CONJUNTO	D	D_T
Un punto	0	0
Un número finito de puntos	0	0
Un conjunto numerable	0	0
Una línea recta	1	1
Un círculo	1	1
Una curva regular	1	1
Un disco en el plano	2	2
Una superficie regular	2	2
Curva de Peano (llena el plano)	2	2
Escalera del diablo de Cantor	1	1
Conjunto ternario de Cantor	log2/log3	0
Curva de Koch (copo de nieve)	log4/log3	1
Triángulo de Sierpinski	log3/log2	1
Membranas pulmonares	2.90	2

Como nos imaginábamos, los primeros ocho conjuntos de la lista no son fractales. Para nuestra sorpresa la curva de Peano y la escalera del diablo de Cantor no son fractales y los últimos ejemplos si son fractales.

Referencias

[1] Barnsley, Michael F. (1988). "*Fractals Everywhere*". Academic Press.

[2] Field, Michael and Golubitsky, Martin. "*Simetry in Caos*". Oxford University Press.

[3] Mandelbrot, Benoit; Freeman, W.H. and Co. (1983). "*The fractal geometry of nature*".

Flor de María Aceff Sánchez

Departamento de Matemáticas.

Facultad de Ciencias.

Universidad Nacional Autónoma de México.

fmas@hp.fciencias.unam.mx