Pro Mathematica Vol. XIV, Nos. 27-28, 2000

FEDERICO VILLAREAL Y VILLAREAL

Roberto ***Velásquez López***

Túcume, 1850.
Pueblo pequeño, calle polvorientas.
Casa de adobe, con troncos de algarrobo
como vigas de techos de barro y quincha.
Horizonte de colinas, restos de pirámides
construidas por los antiguos mochicas.
Cielo gris de agosto, último día del mes.
Nace Federico Villareal.

1. Infancia en Túcume

En 1850, era Presidente del Perú don Ramón Castilla, había relativa calma política, al menos no teníamos guerra civil, y acaba de promulgarse el Primer Reglamento de Instrucción Pública. En Lima, se hablaba más de las consecuencias de la caída de la monarquía de Luis Felipe en Francia y del ascenso de Luis Napoleón, que de los graves problemas nacionales; y en las

✏ *Profesor de la Universidad Nacional de Educación, La Cantuta, Chosica.*

apasionadas discusiones de salón entre orleanistas y bonapartistas, pocos recordaban que aún no se había abolido la colonial "*contribución de indígenas*", tributo que debían pagar quienes cometieran el pecado de nacer indios en el Perú. Mientras los caballeros discutían de política internacional, las damas en los saraos conversaban, con los rostros semi ocultos por sus abanicos, sobre los "amoríos", cada vez más escandalosos, de la reina de España, doña Isabel II. El "*Memorial de Ciencias*", de Mariano de Rivero, único órgano de divulgación científica en el país, había desaparecido y su director se aprestaba para su viaje final a Europa; Miguel Garaycochea, revisaba su "*Cálculo Binomial*", mientras era juez de primera instancia en Chachapoyas; José Granda se encontraba en España inscrito en el Real Seminario de Vergara; José Sebastián Barranca estudiaba medicina...

(Aunque fonéticamente, el apellido de don Federico era Villarreal, en sus trabajos y artículos publicados en la Revista de Ciencias, figura como Villareal y así lo escriben sus biógrafos y comentaristas, J. Tola entre ellos).

2. Preceptor, 1870

La ciudad más cercana a Túcume es Lambayeque. La niñez de Villareal, transcurre entre Túcume y Lambayeque, y él, a los catorce años, entró a trabajar como cajero en la Negociación Zaracóndegui, empresa dedicada a despepitar el algodón de la zona. Buena posición y buen sueldo para un joven que había descubierto que le gustaba la matemática. Podía dedicarse a estudiarla por su cuenta y quería enseñar lo auto-aprendido. Esta vocación docente lo lleva, a los veinte años, a obtener, por concurso, el título de Preceptor, otorgado por la Comisión Departamental de Instrucción Pública del departamento de La Libertad y a publicar, desde los dieciocho años, una serie de notas acerca de métodos de enseñanza de la matemática como aquel curioso "*Auxilio de Federico Villarreal escrito en 2054 versos cuartetos en abril de 1968, que contiene la primera parte de la Aritmética y la primera parte del Algebra, dividido en 52 capítulos, 32 para la aritmética y 20 para el álgebra*" (1), citado por José Tola, en su discurso de orden con motivo del centenario del nacimiento de Villareal.

El 1° de octubre de 1874 Villareal funda una escuela primaria. En 1876, tras las pruebas correspondientes, logra el título de preceptor de segunda enseñanza y pasa poco después a regentar el Colegio Nacional de Instrucción Media de Lambayeque.

3. Lima, 1877

Desde los quince años, Villareal podía comprar o encargar que le compraran libros, pero, ¿cuáles? No había muchos para elegir en el mercado nacional de textos de matemática. El más moderno y conocido era el "*Tratado de Matemáticas*" de Mariano Vallejo, matemático y educador español, fundador del Ateneo de Madrid, cuya obra, en su edición de 1841, se vendía en Lima, Arequipa y Trujillo. Y en esa obra, desde el prólogo, se mencionaba a Hoene Wronski.

En 1873, llega a Lima una misión científica polaca, formada por ingenieros y matemáticos, presidida por D. Eduardo de Habich, quien había sido alumno, en San Petersburgo de Hoene Wronski, "de quien se decía que era el sabio más grande de la humanidad", según frase de Gerardo Dianderas. Quizá esa noticia llegó a oídos de Villareal y la tentación fue demasiado fuerte. Lo cierto es que en 1877 ya estaba en Lima y se presentó a los exámenes de admisión de la Universidad de San Marcos, matriculándose en el primer año de la Sección de Ciencias Matemáticas de la Facultad de Ciencias, cuyo Decanato desempeñaba entonces el Dr. Ladislao Folkierski, maestro polaco, ingeniero y matemático, integrante de la Misión Científica Polaca, que presidiera el fundador de la Escuela de Ingenieros.

4. Wroski y Villareal

Josef María Wronski (1778-1853), cuyo verdadero nombre era Hoene, fue un matemático polaco que se ocupó de mecánica celeste; realizando también estudios filosóficos, exponiendo ideas kantianas en su *libro "Filosofía del Infinito*". Sabemos, y lo confirma el prólogo de Garaycochea (1816-1861) a su Cálculo Binomial, que el "*Tratado de Matemáticas*" de Mariano Vallejo (1779-1846), matemático y educador español, era el libro más moderno de matemática disponible en el Perú en la quinta década del siglo XIX, y en ese libro, en el que casi con seguridad estudió Villarreal, se mencionan, específicamente, a Wronski y a su "*Introducción a la Filosofía de las Matemáticas*". El pensamiento de Wronski, así como atrajo la atención del solitario Garaycochea, cautivó también al joven de Túcume. Citando una de las peculiaridades del espíritu de Villareal y que se hallan presentes en parte importante de su obra, menciona José Tola "su admiración y predilección por la obra del célebre y original matemático polaco Hoene Wronski, que seguramente le fuera dada a conocer en sus detalles por alguno de los profesores que constituían la Misión Polaca de Ingenieros, quizá como lo ha sugerido el Dr. Losada y Puga, por el propio don Eduardo de Habich".

Independientemente de cuándo y cómo tomó Villarreal contacto con estas ideas, es de singular interés que tanto Cristóbal de Losada y Puga, como José Tola Pasquel no sólo las hallan notado sino que ambos consideraran pertinente hacerlas constar al tratar de la obra de Villarreal. Más aún, dice Tola, "A esta influencia sobre Villarreal es indispensable prestar atención particular por cuanto se manifiesta evidente en muchos de sus trabajos y aún en los de algunos de sus discípulos. Entre los trabajos que directamente inspirados por Wronski escribiera Villareal cabe mencionar particularmente la traducción y comentarios de la "*Reforma de la Mecánica Celeste*", el artículo "*El teorema de las Areas no es generalmente exacto*", su nota sobre "*Senos de orden superior*" y el trabajo *titulado "Resolución general de la ecuación de 5º grado*".

En el primero de los trabajos mencionados, Villareal comenta detenidamente las teorías que el sabio polaco escribiera en 1851 y expone sus propias interpretaciones. Su admiración por Wronski se manifiesta en los siguientes párrafos que aluden al fondo metafísico que con frecuencia aparece en su producción científica. "*Contiene, dice refiriéndose al libro de Wronski, su ley universal y fundamental para el establecimiento a priori de la racionalidad del universo y su final ley teológica para la determinación a priori de la estabilidad del mundo*" y en su trabajo sobre *los "Senos de orden superior*", comenta al respecto que éstos: ... *fueron indicados por primera vez en 1811 por Wronski en su Introducción a la filosofía de las Matemáticas*. Después se ocupó de sus propiedades fundamentales en el tomo I de la reforma del saber humano en 1847; este sabio hizo inmensos descubrimientos como los determinantes, que llamó funciones shin, los que han tomado un inmenso desarrollo; las funciones aleph, agregados y facultades que pocos matemáticos los conocen; así como los momentos y senos de orden superior que tienen varias aplicaciones; dotando a la ciencia de su ley suprema de la cual dedujo los métodos secundarios primordiales y suprimío para resolver los problemas matemáticos, que raros son los sabios que los han considerado bajo su verdadero punto de vista.

Fin de la cita Villareal, transcrita por Tola. Sólo sabe comentar que, al mencionar a los discípulos influenciados por las ideas wronskianas de Villarreal, Tola está aludiendo, tangencialmente, a Godofredo García cuyos trabajos: "*La reforma de la Mecánica Celeste de Wronski*" y "*La Reforma de la Mecánica Celeste de Wronski demostrada por la ecuación fundamental de* *la Mecánica*", figuran en la Revista de Ciencias y el *titulado "El método de Wronski y el método clásico de la Mecánica Celeste Integral de un tipo de ecuación diferencial*" aparece en las Actas de la Academia de Ciencias.

En la Universidad de San Marcos, desde 1876, la Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas tenía capacidad para otorgar los grados académicos de bachiller y de doctor, y el título de licenciado. Villareal fue un brillante alumno y tuvo maestros destacados: Granda, Maticorena, Dulanto, Carrillo, Folkierski y La Puente; obteniendo numerosos premios en el curso de sus años de estudio. Optó el grado de Bachiller en 1879, el título de Licenciado en 1880 y el grado de Doctor el 23 de setiembre de 1881, acordándosele la medalla de oro que ofreciera la Facultad al primer Doctor graduado en Matemáticas.

5. El Matemático Villarreal

Al tratar este aspecto dejamos el peso del juicio crítico al Dr. José Tola Pasquel, quien, en su discurso de orden con motivo del Centenario de Villareal, dijo: "Trataré ahora de la obra matemática de Villarreal. En primer término debo referirme a sus escritos polémicos y expositivos. Entre los primeros se encuentran numerosas refutaciones de pretendidas resoluciones de los problemas de la trisección del ángulo y de la cuadratura del círculo; y entre los segundos, sus artículos sobre los cuadrados mágicos y diabólicos, sobre la construcción del heptágono regular y sus contribuciones al Primer Congreso Científico Latino Americano de Buenos Aires de 1898. "*Nomografía o sea construcción de tablas gráficas*" y "*Geometrías no euclideanas*" que mereció un acuerdo especial del Congreso. En los trabajos mencionados se reconoce el permanente esfuerzo que desplegara Villareal por mantenerse al tanto de los más recientes adelantos de las Matemáticas".

"A principios del presente siglo fue publicada la obra del maestro arequipeño D. Miguel A. Garaycochea (1816-1861) titulada "*Cálculo Binomial*" consagrado a la teoría de los números complejos y de sus aplicaciones. Dicha obra incluye un detenido comentario de Villareal en el que establece la originalidad y los alcances de las investigaciones de ese matemático que, a su entender se adelantó considerablemente a los conocimientos de su época, no habiendo dado a conocer desgraciadamente sus resultados cuando fueron obtenidos".

"La teoría de los números atrajo siempre la atención de Villareal que le dedicó numerosos artículos. Entre ellos mencionaremos en primer lugar el que diera a conocer en 1897 acerca de la divisibilidad, en el que, después de observar que la diferencia de dos números que son representados por las mismas cifras en dos sistemas de numeración de bases diferentes es divisible por las diferencias de las bases, establece el siguiente criterio de divisibilidad: *Un número cualquiera es divisible por un cierto divisor si lo es el número que se expresa con las mismas cifras que el primero en un sistema de numeración cuya **base es la del sistema** en que era expresado el número dado disminuido en el divisor*".

"En particular se puede establecer entonces el teorema siguiente: Un número es divisible por un cierto divisor si lo es la suma de sus cifras cuando se le escribe en el sistema de numeración cuya base es el divisor aumentado en la unidad; o bien si lo es la suma de sus cifras de lugar par menos la suma de las de lugar impar como se le escribe en el sistema de numeración cuya base es el divisor disminuido en una unidad. Las conocidas reglas de divisibilidad por nueve y por once, en el sistema decimal, constituyen un caso particular de la proposición anterior".

"En segundo lugar mencionaremos las soluciones que diera a algunas cuestiones relativas a la distribución de las cifras en la escritura de los números naturales es un sistema cualquiera de numeración, en el que da respuesta a problemas tales como el de determinar el número de veces que una determinada cifra entra en la escritura de los números de no más de n cifras; o el de determinar qué cifra ocupa un determinado lugar cuando se escriben a continuación uno de otros los números en su orden natural".

"En una nota publicada en la Revista de Ciencias en 1906, determina de manera general los términos de una progresión aritmética cualquiera, cuyo primer término es la unidad, que sumado con los $n - 1$ término que le siguen da por resultado una determinada potencia entera de n".

"De la fórmula obtenida saca conclusiones interesantes. Entre otras, el llamado teorema de Nicómaco, según el cual la sucesión de los números impares goza de la propiedad de que su primer término es el cubo de 1, la suma de los dos siguientes es el cubo de 2, la de los tres que siguen es el cubo de 3 y así sucesivamente".

"Asimismo hace ver que en la sucesión de los números naturales no hay números consecutivos cuya suma sea una potencia entera del número de ellos si ese número es par, pero si los hay si el número es impar".

"Debemos mencionar también una nota de 1908, en que plantea y resuelve los dos problemas siguientes:

I. Hallar dos números terminados en la misma cifra y tales que las últimas cifras del producto constituyan el cuadrado de la cifra en que terminan los dos números dados.

II. Hallar tres números terminados en la misma cifra cuyo producto termina en tres cifras que constituyan el cubo de la cifra en que terminan los números dados".

"Para concluir con esta referencia a sus trabajos relativos a la teoría de los números mencionaré los artículos que escribiera a propósito del trabajo que publicará el profesor de matemáticas D. Prudencio Cisneros, titulado "*Un método peruano para conocer, si un número es o no primo absoluto y en consecuencia hallar todos los factores de un número dado*". En varios artículos, publicados en 1905 y 1906, Villareal expone, aclara y completa las investigaciones de Cisneros, haciendo ver que el procedimiento propuesto aventaja a los métodos clásicos".

Villareal se propuso y resolvió también algunas cuestiones algebraicas de interés. La más importante de todas es la relativa a la regla para elevar un polinomio a una potencia cualquiera. La fórmula descubierta por Villareal permite calcular de manera sencilla los sucesivos términos del desarrollo, y aventaja evidentemente a todos los métodos ideados para resolver ese problema".

"En forma semejante a aquella en que el llamado triángulo de Pascal, permite calcular los coeficientes del desarrollo de la potencia de un binomio, Villareal ha mostrado cómo un cuadro numérico de fácil construcción, que llama trapecio potencial, permite obtener los coeficientes del desarrollo de la potencia de un polinomio".

"A título de curiosidad mencionaremos también entre sus trabajos algebraicos el titulado "*Problema de los paquetes de baraja*", en el que estudia y discute detalladamente el problema planteado por el juego de adivinación que consiste en repetir varias veces la operación de distribuir las cartas en paquetes de igual número y señalar cada vez el paquete en que se halla la carta elegida. Villareal trata la cuestión desde un punto de vista general y da reglas ingeniosas para su resolución en casos prácticos". "La geometría dio materia a Villareal para numerosos artículos y notas entre las cuales mencionaré los más importantes. En el año 1905, hallamos en la Revista de Ciencias un artículo de Villareal en el que analiza el problema de determinar un cuadrilátero cuyos lados son dados y que encierra el área máxima, demostrando que es el cuadrilátero inscriptible. Es oportuno mencionar que este trabajo fue completado en cierto sentido por el ingeniero G. Corradi en una nota aparecida en la Revista de Ciencias".

"En el año 1904 el profesor de la Universidad del Cusco, don Eusebio Corasao publicó en el periódico "*El Sol*" de esa ciudad, dos artículos en los cuales probaba que el área de un polígono regular es media proporcional entre el área del círculo de igual perímetro y el área del círculo inscrito, y obtenía algunas consecuencias de esa proposición. Llegado a conocimiento de Villareal ese trabajo, hizo observar, en una nota escrita en 1906, en él calificaba como "*notable*" el resultado de Corasao, que el teorema es aplicable a todo polígono circunscrito a un círculo, sin necesidad de que sea regular, lo que constituye una efectiva generalización".

"En el mismo año de 1906, comienza a publicar por partes en la Revista de Ciencias, un largo trabajo titulado "*Poliedros regulares e irregulares*" que fue luego editado en forma de libro. La primera parte de esta obra contiene una exposición histórica y luego el cálculo de los volúmenes de los poliedros, regulares y semiregulares, dando los valores de los coeficientes por los cuales debe multiplicarse el cubo de la arista para obtener esos volúmenes. En la segunda parte da un conjunto de fórmulas para calcular los diversos elementos de los poliedros mencionados resolviendo todos los problemas planteados por ese cálculo en forma exhaustiva y original. El libro contiene valiosas informaciones desde el punto de vista práctico habiendo requerido una cuantiosa labor de cálculo".

"Ha llamado Villareal "*Problema del niño*" al siguiente: Un móvil se desplaza en línea recta con velocidad constante y otro se mueve también con velocidad constante, de modo que la tangente a su trayectoria pasa constantemente por el primer móvil. Hallar la ecuación de la curva descrita por el segundo móvil. En una nota de 1906 plantea e integra la ecuación diferencial de ese problema".

"La tesis doctoral de Villareal del año 1881 fue extraviada y no la conocemos en su forma original. Afortunadamente en base a manuscritos que conservara, el mismo la reconstruyó y publicó en 1914 con el nombre de "*Clasificación de las curvas de tercer grado*". En este extenso trabajo lleva a cabo una detenida discusión de esas curvas haciendo uso de ideas originales tales como la del empleo de los que llamara ejes naturales que facilitan la discusión completa".

"Debe también mencionarse una nota publicada en 1919 en que determina la diferencia entre la hipotenusa y un cateto de un triángulo esférico valiéndose de dos procedimientos distintos haciendo uso en uno de ellos de su propia forma para elevar a potencia un polinomio".

"Para finalizar esta forzosamente breve reseña de la obra de Villareal quiero referirme al trabajo que en el nombre de "*Integración por traspasos*" publicara en 1920 en que expone parte de sus tesis de bachiller en 1879, y en que valiéndose del método de integración por partes obtiene una fórmula que generaliza otra de frecuente aplicación, llamada fórmula de Bernoulli".

"Los trabajos que he citado no constituyen sino una parte de su obra matemática y una muy pequeña de la obra de su vida. Por ellos sin embargo puede apreciarse su extraordinaria labor; más admirable aún si se tiene en cuenta su tiempo y su medio. Alrededor de su persona se desenvuelve todo el movimiento científico del Perú durante medio siglo, pues dio impulso y aliento a la investigación original, exhibiendo siempre antes sus alumnos y sus propios compañeros del claustro el ejemplo de su incansable esfuerzo".

6. El Contexto: el hombre, su tiempo y su medio

Todo intento de comprensión de la obra de un hombre es incompleto si no se toman en cuenta sus circunstancias: su tiempo y su medio. El 5 de abril de 1879, la flota chilena bloquea Iquique y ese mismo día declara la guerra al Perú. Villareal presenta por entonces su trabajo titulado "***Fórmulas y métodos que deben completarse en matemáticas puras***", como tesis de Bachiller en Ciencias Matemáticas. En 1880, Arica ha caído y las tropas de Lynch saquean y arrasan el norte, arden Salaverry, Pacasmayo y Eten, lugares que Villareal ha conocido, playas que ha recorrido; él presenta su tesis de Licenciado en Matemática *titulada "Efectos de la refracción sobre el disco de los astros*".

Enero de 1881, el invasor está frente a Lima, es hora de luchar en las trincheras. El sol se está poniendo, el subteniente Federico Villareal, del

Batallón 18 de la Reserva, combate en el ala derecha de la primera línea del frente; la muerte pasa muy cerca de él, pero no se amilana y cuando se reinicia la lucha pasa a formar parte del centro de la línea. Vuelve a rozarle la muerte, pero el destino de Villarreal no se había completado aún y se alista nuevamente para participar contra el ataque chileno al Morro Solar, y así continua hasta que nuestro ejército es vencido en Chorrillos.

15 de enero: Chorrillos, Barranco Miraflores, están en llamas. El 17 de enero de 1881, Lima es ocupada. La Universidad de San Marcos, la Biblioteca Nacional, la Escuela de Ingenieros, son cuarteles chilenos. En la Facultad de Ciencias acampa una parte de su caballería. Papeles, documentos, memorias manuscritas de los alumnos sirven para fines que es mejor no mencionar. Poco después, Villarreal presenta su tesis doctoral, "*Clasificación de las curvas de tercer grado*". ¿Dónde la sustentó? Quizás en la casa de José Granda, porque, ocupados los locales universitarios, éste había puesto a disposición del doctor José María Romero, decano de la Facultad de Ciencias, y del ingeniero Eduardo de Habich, Director de la Escuela de Ingenieros, su amplia casa de dos plantas en la calle Zamudio, para que funcionaran allí instituciones, lo cual fue aceptado y en ese local ambas instituciones permanecieron más de dos años.

7. Docente Universitario

El 16 de agosto de 1880, Villareal es nombrado Profesor Adjunto de Astronomía, cátedra de la cual se hizo cargo por ausencia del Principal. Pero, otra vez, no hay que olvidar el contexto: no hay locales, no hay quien pague sueldos. Hasta los libros hay que ocultarlos para que no se los lleven los chilenos.

Muchos profesores se ausentan. Granda, aparte de sus cursos, asume algunos que correspondían a profesores que se retiran. El número de alumnos es pequeño: en toda guerra, lo mejor de juventud es la primera víctima. ¿Qué puede hacerse en una ciudad ocupada?. Estudiar y conspirar. Eso hace Federico Villareal. En 1882, se matricula como alumno en la Escuela de Ingenieros. Dice al respecto el Ing. Suárez Jimena, que vale la pena parar en mientes en el hecho de este ingreso: "*A la edad de treintidos años, cargado ya de méritos y ungido, como académico por la Facultad de Ciencias de nuestra Universidad decana con el título de Doctor en Matemáticas, llevado por su insaciable sed de saber y por su deseo de tomar contacto con el campo experimental de las ciencias aplicadas, decide estudiar la carrera de* *ingeniería. Y no acude entonces al fácil medio de reconocimiento de los estudios realizados, a lo que hubiera tenido perfecto derecho, dada su solvencia intelectual, sino que, guiado por su admirable probidad, resuelve ponerse al nivel de los bisoños alumnos recién egresados de los estudios secundarios y se matricula en el primer año, asistiendo en forma regular a las lecciones de todos los cursos*" (2).

Cierto, y muy poético, pero falta un personaje: José Sebastián Barranca. Aparte de informar a Villareal acerca de la teoría del astrónomo alemán Rudolf Falb, sobre los temblores y erupciones volcánicas, y de ser su profesor de Mineralogía, Barranca y Villareal compartían un hobby secreto: el estudio de la lengua de los antiguos mochicas y la gramática de la lengua de Eten, obra que Barranca culminara y que hoy, que tanto se habla del señor de Sipán, está en absoluto olvido. Es José Sebastián Barranca, el maestro que más influye en ligar a Villareal con las cosas de la tierra durante sus estudios de ingeniería, es él quien lo alienta a recibirse también como ingeniero de minas. Villareal nunca olvidará a este amigo y maestro. Cuando, en diciembre de 1909, muere Barranca en miseria, cuando ni el Estado, ni la Universidad, ni la Escuela de Ingenieros se hacen presentes en su modestísimo sepelio, es Villareal quien, de luto riguroso, se encarga de darle el postrer adiós a su amigo; dice Basadre: "*No estuvo representada la juventud estudiantil. El mayor porcentaje de oyentes que tuvo Federico Villarreal cuando pronunció su discurso fúnebre fue el de unos cuarenta morenos que habían asistido a otro entierro. Según se dijo, la Beneficencia negó un nicho perpetuo al sabio por no haber sido abonado el precio respectivo*".

8. El Ingeniero Villareal

Villarreal obtiene el título de ingeniero civil en 1886 y el ingeniero de minas en 1887, dice Tola, "*prestando sus servicios docentes, aún siendo alumno, dada su sólida preparación matemática, en el curso de Resistencia de Materiales que se le encomendara en 1883 y que desempeñara hasta el fin de su vida, y en el curso de Cálculo Infinitesimal que dictara de 1884 a 1886*". Desde entonces comienza la enorme labor docente y científica de Villareal en la Facultad de Ciencias, en la Escuela de Ingenieros, en las Escuelas Militar y Naval y en las numerosas comisiones técnicas y educacionales que le fueron encomendadas, realizando al mismo tiempo un abundante trabajo de investigación y divulgación científica en libros, revistas y periódicos, tendientes todos sus esfuerzos a contribuir al progreso de los estudios científicos en el Perú.

Suárez Jimena, profesor del curso en la Universidad Nacional de Ingeniería, señala que el propio Villarreal decía en el prólogo de su texto de Resistencia de Materiales, respetando la redacción original: "*he introducido nociones de Estática Gráfica, que por primera vez se ha enseñado, no sólo en el Perú sino en toda la América Meridional, para resolver por depurados los problemas que sólo se hacía empleando el Algebra*; he hecho conocer los primeros principios de la Nomografía, o sea la construcción de tablas gráficas, que se emplean juntamente con las tablas numéricas, teniendo sobre éstas la ventaja de percibir inmediatamente la forma gráfica de la ley y permiten conocer si se ha cometido algún error; aunque no se consiga la grande aproximación que dan las numéricas pero que dan la suficiente que exijan las aplicaciones". Suárez Jimena, por su parte enuncia tres teoremas de Villareal que, según él, constituyen una contribución realmente importante al estudio de resistencia de materiales:

1. En toda viga empotrada en sus dos extremos, la suma de los momentos de empotramiento debidos a una carga dada es igual al máximo momento de flexión que produciría la misma carga si la viga estuviera simplemente apoyada.

2. En toda viga empotrada en sus dos extremos, los momentos de empotramiento debidos a una carga concentrada son inversamente proporcionales a las distancias de la carga a los extremos empotrados.

3. En toda viga empotrada en un extremo y apoyada en el otro, el momento de empotramiento generado en el extremo empotrado por la acción de una carga dada es igual al momento que existiría en este extremo si la viga fuera empotrada en sus dos extremos, más la mitad del que en ese caso existiría en el otro extremo.

9. Antropólogo

Pero, además de la obra matemática de Villarreal, es necesario hacer constar algunas características que enmarcan todo su quehacer científico. Con motivo del centenario de su nacimiento, Darío Acevedo, entonces decano de la Facultad de Ciencias, dijo que fuera del campo preferente de su vocación, Villarcal abordó con éxito otras disciplinas estudiando la lengua yunga o mochica, y el esperanto que aprendió y se afanó en difundir, llegando a ser considerado como uno de los más notables esperantistas del Mundo. Por otro lado, Tola señaló, antes de tratar en detalle sus trabajos matemáticos, que debía referirse a dos manifestaciones peculiares de su espíritu que se hallaban presentes en parte importante de su obra: "la primera la constituyen sus desinteresados y verdaderamente extraordinarios esfuerzos por dar a conocer y por divulgar el esperanto, labor que emprendiera al año 1900 y que con el tiempo lo llevara a dictar conferencias, escribir artículos y hasta editar una revista especial que llamó "*Adelante esperantistas*" (¡Antaunen Esperantistoj!) que fundara el 28 de julio de 1903 ... La segunda es su admiración y predilección por la obra del célebre y original matemático polaco Hoene Wronski ...".

El interés de Villarreal por el esperanto, la lengua artificial creada por Lazarus L. Zamenhof hacia 1880, era muy comprensible y fue compartida por muchos científicos e intelectuales deseosos de la existencia de un lenguaje común para toda la especie humana. El "*Internacia Linguo*" de Zamanhof, publicado en 1894 contribuyó a elevar el entusiasmo por este proyecto, que aún hoy tiene adherentes.

Pero el aspecto menos estudiado de Villarreal es su contribución a la etno-historia, puesta en evidencia en lo referente a la lengua mochica. Durante el primer cuarto de siglo de su vida, en su tierra natal, entre los campesinos de las haciendas algodoneras probablemente había aún, entre 1850 y 1876, algunos que hablaban o usaban palabras de la lengua yunga; la "*Gramática de la lengua de Eten*", de J. S. Barranca es una prueba de su relativa vigencia. Pero, además del interés de Villareal por la lengua yunga, hay otro importante estudio de calidad etno-histórica, y es el relativo a su trabajo publicado en los Boletines N° 4, 5, y 6, de la Sociedad Geográfica de Lima, de setiembre 1894, titulado "*Los cometas en Tiempos de Huayna Capac*", vinculado a la mitología del incario y que sirve para el historiador de la astronomía y de la geografía de los pueblos andinos. Señala Villareal, "*El cometa que dice Garcilaso que apareció a la muerte del Inca Huáscar fue el de 1532; además añade que poco después aparece otro cometa, cuando Atahualpa estaba prisionero, fue el de 1533, ambos observados, como hemos dicho, por Apian*".

10. Visión de un Maestro

"Pequeño, afable, con la mirada siempre distraída, evocando quizás fórmulas matemáticas o teorías en gestación, su paso marcaba por las aulas de San Marcos y de la Escuela de Ingenieros un acontecimiento que concitaba singular animación. Cordial y bondadoso, para todos tenía una sonrisa de afecto, y aunque su palabra no era fácil, sus enseñanzas y dictados provocaban un movimiento unánime de contracción en todos sus discípulos. Vestido con su clásica ceñida levita, siempre de riguroso negro y con aire austero, al dictar su clase se transformaba. Puesto de pie, llenaba la pizarra de fórmulas matemáticas, interrumpiéndose a cada instante para explicar aquello que no habían entendido bien los menos aprovechados. Verdaderamente inflamado del fuego magisterial, se abstraía tanto que borraba las cifras y los signos con sus propios dedos, y al terminar la clase su impoluta vestidura negra estaba llena de manchas de tiza. Al abandonar el aula los pacientes porteros del claustro le limpiaban su levita, en medio de las protestas regañonas pero afables del Maestro". Esta es la visión que, del Villarreal de la segunda década del siglo, tenía el Ing. Eduardo Habich, hijo, en 1950. [Conversando al respecto con el Ing. Juan N. Portocarrero, él, quien también acostumbraba vestir de riguroso negro, me confirmó esta visión, agregando sí, respecto a la facilidad de palabra, que Villarreal era muy capaz de echar discursos y que, "*casualmente digamos, era muy sarcástico y socarrón*"] (3).

En el Centenario de su nacimiento, Darío Acevedo, diría en el auditorio de la Facultad de Ciencias de la Universidad de San Marcos, que Villareal: "*Fue un espíritu selecto, de inteligencia privilegiada, de profundo sentido analítico, de gran imaginación, de amplísima cultura, sencillo y bueno, con la humildad de las almas superiores, sin egoísmos ni pasiones y con capacidad extraordinaria para la investigación matemática*". Esto confirma la personalidad del maestro, pero no da una idea de la amplitud de su cultura, porque Villarreal no sólo fue un eminente investigador de las matemáticas puras y aplicadas, en cuyo dominio realizó trabajos notables y que con criterio realista y práctico, aprovechó sus conocimientos teóricos, resolviendo múltiples problemas de matemáticas aplicadas, especialmente de Astronomía, de Física, de Geografía Matemática y de Ingeniería Civil y de Minas. Fue también un hombre profundamente comprometido con su entorno social y con la historia de su tierra, por ello tampoco fue insensible a las emociones de la política y militó al principio, al igual que José Granda, en las filas del Partido Civil de don Manuel Pardo; posteriormente se adhirió al Partido Liberal, formando parte del Comité Central Directivo de la Asamblea Liberal como delegado elegido por la provincia de Chiclayo, separándose de este partido en 1903. Formó parte de la Liga para las elecciones municipales de Lima: fue elegido Concejal en 1900; Inspector de Alumbrado cuando se instaló la luz eléctrica, de Agua potable y de Pesas y Medidas en 1902 y después Inspector de Camal en 1903; e Inspector del Jardín de la Exposición en 1904. Elegido como Senador Suplente por el Departamento de Lambayeque en 1909, se incorporó a la Cámara de Senadores en 1912, asistiendo a las Legislaturas Extraordinarias de 1913 y 1914, siendo presidente de la Comisión de Instrucción; después de la de Obras Públicas; y por último miembro de la Comisión de Presupuesto. Tomó parte activa en la discusión de la ley sobre Enfiteusis, publicando una tabla para su aplicación; propuso modificaciones a la Ley de Bancos Hipotecarios aprobadas por el Senado; y consiguió que la Cámara de Senadores publicara un folleto sobre el derecho que tiene el Estado sobre la ribera llamada "Gallinar" en el Callao.

Para finalizar esta pequeña semblanza, vale la pena recordar una anécdota que, en 1950, gustaban recordar quienes conocieron personalmente a Villarreal. Él viajó poco al exterior y cierta vez que debía hacerlo, invitado a una conferencia internacional, sus amigos le dijeron que no olvidara de llevar un traje de etiqueta; Villareal respondió lacónicamente, "*los que no me conocen no saben quien soy; los que me conocen saben quien soy*". [Anécdota referida por Don Juan N. Portocarrero, cuya muletilla era "*casualmente digamos*", quien decía que la de Federico Villareal era "*cabalmente*" y que la usaba a troche y moche en toda conversación].

Por cierto hay también otras opiniones serias que es justo hacer constar; por ejemplo la de Jorge Basadre, quien dice: "A pesar de su genio, Villarreal no tuvo brillo como escritor. En sus lecciones, su gran dificultad de expresión levantó un muro ante los alumnos, dando lugar, de un lado, a monólogos acompañados por complicados cálculos en la pizarra y, de otro, a escenas cómicas o grotescas".

Federico Villarreal falleció el 3 de junio de 1923 y su tumba se hallaba en el Cementerio "*Presbítero Maestro*" de Lima; empero, recientemente sus restos han sido trasladados a Túcume. Es el único matemático en cuyo honor existe un monumento en el país (Barranco, Lima).

Anexo

El Teorema de Nicómaco por Villarreal

1. Introducción

Nicómaco de Gerasa, fue un neopitagórico, que vivió, aproximadamente, 100 años después de Cristo; se conoce de él una "*Introducción a Aritmética*" obra en la cual no presenta, por lo general, demostraciones. Nicómaco se limita a enunciar proposiciones que luego ilustra con algún ejemplo. Empero, su obra gozó de gran popularidad durante la época romana; fue traducido al latín por Apuleyo de Madaura y después por Boecio. En 1905, bajo el título de "*Cuestiones Propuestas*", la Revista Matemática de Santiago de Chile, presentó como problema por resolver, en su página 358, una de las proposiciones de Nicómaco en la forma siguiente:

"*Teorema de Nicómaco. Si en la serie de números impares* 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, ... , $2n - 1$, ... *se toma el primer término, después la suma de los dos siguientes, enseguida la de los tres siguientes, etc., cada uno de estos números es un cubo perfecto*".

Villarreal, tan pronto como recibió la revista, se interesó por el tema y envío su solución, la misma que fue publicada por la "*Imprenta y Litografía Universo*" de Santiago de Chile en 1906 en forma de una separata, cuyo único ejemplar conocido actualmente en el Perú se encuentra en la Biblioteca Nacional, y es el que ha servido de base al presente artículo. El trabajo de Villarreal se publicó también en el primer número de la Revista de Ciencias, lo que indica la importancia que él le concedía. Por ello consideramos que esta nota sobre el Teorema de Nicómaco es una muestra significativa de la capacidad expositiva del maestro F. Villarreal y del nivel de la matemática sudamericana de principios de siglo.

2. La Demostración del Teorema de Nicómaco por F. Villarreal

Villarreal comienza su demostración recordando la conocida propiedad pitagórica referente a la suma de números impares consecutivos, que data del siglo V a C.: $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots *(2n\text{-}1) = n^2$. En efecto, dice:

"*Sean los números impares* 1, 3 5, 7, 9, ... 2*n*-1, ... *En toda progresión aritmética, la suma del primer término, 1 en este caso, con el último* $2n - 1$, *da la suma* 2*n*, *que multiplicaba por la mitad de los términos* $\frac{1}{2}n$, *da la suma* n^2, *es decir, que la suma consecutiva de los números impares son los cuadrados*".

Pasa a continuación al estudio del problema propuesto: "Tomemos el número impar $2n - 1$, y después otro $2m - 1$, para encontrar la suma de la progresión incluyendo estos números, "sumaremos ambos y tenemos $(2n + 2m - 2)$ y como el número de términos incluyendo ambos es $m - n + 1$, multiplicando por su mitad, tendremos su suma $(n + m - 1)(m - n + 1)$. Este resultado es general; llamemos u al número de impares considerados, es decir, hagamos $m - n + 1 = u$ lo que da $m = u + n - 1$, luego $n + m - 1 = u + 2n - 2$ y tendremos la suma

$$(u + 2n - 2)u. \qquad (1)$$

"Pero en la serie de impares 1, (3, 5), (7, 9, 11), (13, 15, 17, 19) ... tomamos para el inicial n los valores 1, 2, 4, 7, 11, ... , $1 + ½.\ u(u - 1)$ que corresponde al lugar que ocupa el primer impar de cada paréntesis y habiendo dentro de dichos paréntesis u números impares, tendremos $2n = 2[1 + ½\ .\ u(u - 1)] = 2 + u(u - 1)$ y sustituyendo en la fórmula sumatoria (1), resulta $[u + 2 + u(u - 1) - 2]u = u^3$, luego la suma de los u números impares principiando del que ocupa el lugar $1 + ½.\ u(u - 1)$ es igual al cubo de u, que es el teorema que se quiere demostrar. Así tomando para u el valor 7 tendremos que los siete números impares, principiando del que ocupa el lugar $1 + ½.\ 7(7 - 1) = 22$ que es el $2n - 1 = 2 \times 22 - 1$ da los siete números impares $43 + 45 + 47 + 51 + 53 + 55 = 343$ que es el cubo de 7. Y de la misma manera los 100 números impares, principiando del que ocupa el lugar $1 + ½.\ 100(100 - 1) = 4951$ que es el impar $2n - 1 = 2 \times 4951 - 1 = 99010$ sumarán 1000 000. En efecto, el último impar será $9901 + 2(100 - 1) = 10099$ y la suma del primero y el último da $9901 + 10099 = 20\,000$ y multiplicado por la mitad de su número que es 50, da la suma 1 000 000 que es el cubo de ciento".

Como puede observarse la solución de Villarreal es sumamente didáctica y no se limita al caso presentado sino que permite una generalización del mismo sólo las conocidas fórmulas de las progresiones aritméticas $a_n = a_1 + (n - 1)d$, $S = (a_1 + a_n)\ n/2$.

3. Generalización del Teorema de Nicómaco por Villarreal

"De una manera más general, tenemos el término n de una progresión aritmética cuyo primer término es 1 y la razón es d, por la fórmula $1 + d(n - 1)$ y el término que ocupa el lugar m por $1 + d(m - 1)$, la suma de ellos es $2 + d(m + n - 2)$ y por la mitad de los términos que es $m - n + 1$, resulta que la suma incluyendo el n-ésimo y el m-ésimo término es

$$\{1 + ½.\ d(m + n - 2)\}\ (m - n + 1).$$

Llamando u al número de estos términos, es decir $u = m - n + 1$, tenemos $m = u + n + 1$ y sustituyendo $\{1 + ½.\ d(u + 2n - 3)\}$. Si se desea que esta suma sea la potencia u^x, tendremos despejando n, que

$$n = u^{x-1} - 1)\ /\ d + ½.\ (3 - u) \qquad (2)$$

que debe ser un número entero. Vamos a hacer algunas aplicaciones:

a) Tomemos en primer lugar la serie de los números naturales y que se desee tener los cuadrados, entonces $d = 1$, $x = 2$, resulta $n = u - 1 + ½.\ (3 - u) = \frac{u+1}{2}$, luego u debe ser impar para que n sea entero. Si $u = 1, 3, 5, 7, 9, \ldots$; $n = 1, 2, 3, 4, 5$, Luego los números naturales, principiando por un de ellos y tomando el doble menos 1 su suma es el cuadrado de su número; por ejemplo, principiando desde el 5, el doble menos 1 es 9 y tenemos los nueve números 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 que suman 81, cuadrado de 9. Para el principio desde el 7, el doble menos 1 es 13, y los trece números 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 suman 169, cuadrado de 13.

b) Tomemos en segundo lugar la serie de números naturales y se desean tener los cubos, entonces $d = 1$, $x = 3$, la fórmula (2) se convierte en

$$n = u^2 - 1 + ½.\ (3 - u) = ½\ .\ [1 + u(2u - 1)]$$

para que n sea entero es preciso que u sea impar, para que así el producto de los dos impares $2u - 1$ y u dé un impar y agregando 1 tenga mitad. Sí $u = 1, 3, 5, 7, 9, \ldots$; $n = 1, 8, 23, 46, 77, \ldots$ luego los números naturales expresados son los únicos que gozan de la propiedad que la suma de los consecutivos es el cubo del número de ellos; así 8, 9, 10 dan 27, cubo de 3; lo mismo 23, 24, 25, 26, 27 suman 125, cubo de 5, que es el número de sumandos. Los números encontrados forman una serie aritmética de segundo orden, es decir, que las segundas diferencias son constantes: 7, 15, 23, 31, 39, 47, ... $7 + 8\ (n - 1)$ a cuya suma agregando uno da la fórmula $A = 1 + [7 + 4(n - 1)]^n$ que da esos números haciendo $n = 0.,\ 1,\ 2\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots$

$$A = 1,\ 8,\ 23,\ 46,\ 77,\ 116,\ 163,\ \ldots$$

c) Tomemos en tercer lugar la serie de los números impares y que deseamos los cubos, entonces $d = 2,\ x = 3,$ resulta para la fórmula

(2): $$n = \frac{u^2-1}{2} + \frac{1}{2}(3-u) = 1 + \frac{1}{2}u(u-1)$$

luego u puede ser cualquiera, porque el producto de dos números naturales consecutivos tiene mitad exacta y agregando uno se tiene el valor de n y el impar desde donde debe principiar será

$$1 + 2(n - 1) = 1 + u(u + 1),$$

luego si $n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots,$ los impares son $1, 3, 7, 13, 21, \ldots$ luego los números impares que se tomen para formar los cubos serán 1, (3,5), (7, 9, 11), (13, 15, 17, 19), ... Es decir que principiando del impar $1 + u(u - 1)$ y tomando u de ellos, la suma es el cubo de u, que es el teorema propuesto; así, si $u = 4$, tenemos $1 + 4.3 = 13$ y los cuatro impares 13, 15, 17, 19 suman el cubo de cuatro. De la fórmula general (2) se pueden sacar muchas otras propiedades.

d) Por ejemplo, en la serie aritmética 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, ... , cuya razón es 3, buscar los números que suman su mismo número de términos, entonces $d = 3,\ x = 3,$ y la fórmula (2) se convierte en

$$n = \frac{u^2-1}{3} + \frac{1}{2}(3-u) = 1 + \frac{1}{6}(u-1)(2u-1)$$

que debe ser un número entero, pero como ningún impar $2u - 1$ tiene sexta, es necesario en primer lugar que $u - 1$ sea divisible por 6, luego $u = 7, 13, 19, 25, \ldots$, los múltiplos de 6 + 1; en segundo lugar como los impares $2u - 1$ pueden tener tercia cuando $2u - 1 = 3z$, es decir $u = \frac{1}{3}(3z+1)$ entero, lo que queda $u = 2, 5, 8, 11, 14, \ldots$ es necesario que el otro factor $u - 1$ tenga la mitad, es decir que u sea impar, luego sólo deben tomarse de los anteriores $u = 5, 11, 17, 23, \ldots$ los múltiplos de 6 menos 1 y los valores de u que dan n entero son $6k \pm 1$, siendo k un número entero cualquiera.

Por ejemplo, tenemos $u = 13$, tenemos $n = 1+\frac{1}{6}\cdot(12)(25) = 51$ y el primer número de la serie será $1 + 3(51 - 1) = 151$; el último será $1 + 3(63 - 1) = 187$, cuya suma es 338, su mitad 169 por 13, es el cubo de 13.

Se pueden buscar los números de la progresión aritmética 1, 4, 7, 10, 13, 16, ... que satisfacen la condición propuesta haciendo $u = 6k \pm 1$ en el valor n.

$n = 1+\frac{1}{6}(6k \pm 1 - 1)(12k \pm 2 - 1)$ que sustituyendo en la fórmula de los términos de esa progresión $1 + 3(n + 1)$ resulta $T = 1+\frac{1}{2}(6k \pm 1 - 1)(12k \pm 2 - 1)$ que da dos valores $A = 1 + 3k(12k - 1)$, $B = 1 + 3(3k - 1)(4k - 1)$ haciendo $K = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ se tiene atendiendo a $u = 6k \pm 1$ los números A y B y agregando el triple de $u - 1$ resultan los últimos C y D.

Referencias

[1] Discurso del Dr. José Tola Pasquel, durante el acto de Inauguración del Seminario "*Federico Villareal*", de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

[2] Discurso de orden del Ing. Eduardo Suárez Jimena durante el Homenaje a Federico Villarreal, en el Centro de Instrucción Militar del Perú.

[3] Conversaciones con el Ing. Juan N. Portocarrero sobre Federico Villarreal y su época.

[4] Velásquez López, Roberto. "*El Teorema de Nicócamo por Villarreal*".

Roberto Velásquez López
Universidad Nacional de Educación,
La Cantuta, Chosica.