Pro Mathematica Vol. XV, Nos. 29-30

SUPERCONVERGENCIA DEL GRADIENTE PARA ELEMENTOS FINITOS RECTANGULARES

Renato ***Benazic Tomé***

Resumen

En el presente trabajo, primeramente consideramos el Problema de Dirichlet para un operador elíptico bidimensional de segundo orden, luego describimos el espacio de elementos finitos sobre el cual trabajaremos y consideramos fórmulas de cuadratura las cuales son exactas sobre polinomios de grado cuatro en cada variable. En la sección 4 enunciamos y demostramos algunos lemas que sirven para establecer la superconvergencia del Gradiente la cual se da en la sección 5. En las secciones 6 y 7, aplicamos los resultados de superconvergencia a problemas de tipo parabólico e hiperbólico, respectivamente, usando normas y seminormas apropiadas.

IMCA. Facultad de Ciencias Matemáticas, UNMSM.

El esquema es similar al trabajo de Andreev - Lazarov [1], pero en nuestro trabajo usamos una forma bilineal más general y establecemos la superconvergencia con relación a problemas hiperbólicos, la cual no está dada en la referencia citada, siendo éste nuestro principal resultado.

1 Preliminares

Sea Ω un dominio en $\mathbb{R}^2$ tal que su frontera Γ es unión de segmentos de rectas paralelas a los ejes coordenados. Consideremos el siguiente problema de Dirichlet:

$$\left| \begin{array}{l} -\sum\limits_{i,j=1}^{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right)\right] - b(x)u(x) = f(x), \quad \forall x \in \Omega \\ u\big|_{\Gamma} = 0 \end{array} \right. \tag{1}$$

donde $x = (x_1, x_2)$ y $f \in L^2(\Omega)$. El problema (1) está asociado a la forma bilineal:

$$a(u,v) = \int_{\Omega}\left[\sum_{i,j=1}^{2}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\right) + buv\right]dx, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega) \tag{2}$$

Asumiremos que se cumplen las siguientes condiciones:

$$\left| \begin{array}{ll} a) & a_{ij} \text{ son Lipschitzianas sobre } \bar{\Omega},\ \forall\, 1 \leq i,j \leq 2 \\ b) & a_{ij} = a_{j,i},\ \forall\, 1 \leq i,j \leq 2 \\ c) & \exists\, \alpha_0 > 0 \text{ tal que } \sum\limits_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\psi_i\psi_j \geq \sum\limits_{i=1}^{2} \psi_i^2,\ \forall x \in \Omega \\ d) & \exists\, b > 0 \text{ tal que } 0 \leq b(x) \leq \bar{b} \quad \forall x \in \Omega \end{array} \right. \tag{3}$$

De (3) deducimos que $a(\cdot,\cdot)$ es un operador $H_0^1(\Omega)$-elíptico.

En el presente trabajo, usamos las notaciones usuales de los espacios de Sobolev:

$$
\begin{aligned}
H^m(\Omega) &= \{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\}, \; m = 0, 1, 2, \ldots \\
H_0^m(\Omega) &= \{u \in H^1(\Omega) : u\big|_\Gamma = 0\} \\
H^{m,\infty}(\Omega) &= \{u \in L^\infty(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\}, \; m = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}
$$

La norma en $H^m(\Omega)$, denotada por $\| \cdot \|_{m,\Omega}$ se define como

$$
\| u \|_{m,\Omega}^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \| D^\alpha u \|_{0,\Omega}^2,
$$

el producto interno se denota por $(\cdot, \cdot)_{m,\Omega}$ y la seminorma $|\cdot|_{m,\Omega}$ se define como

$$
|u|_{m,\Omega}^2 = \sum_{|\alpha| = m} \| D^\alpha u \|_{0,\Omega}^2,
$$

mientras que la norma $\| \cdot \|_{m,\infty,\Omega}$ en $H^{m,\infty}(\Omega)$ es definida como

$$
\| u \|_{m,\infty,\Omega} = \max_{|\alpha| \leq m} \| D^\alpha u \|_{\infty,\Omega}
$$

La solución débil del problema (1) es una función $u \in H_0^1(\Omega)$ la cual satisface:

$$
a(u, v) = (f|v)_{0,\Omega}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{4}
$$

La existencia y unicidad de la solución de (4) es una consecuencia del Teorema de Lax-Milgram.

2 El Espacio de Elementos Finitos

Para construir el espacio de elementos finitos $\mathcal{M}_h$, consideramos una familia de particiones $\mathcal{P} = \{R_\ell\}_{\ell \in \Lambda}$ de Ω, regular en el sentido de Ciarlet - Raviart [3] tal que cada elemento rectangular R_ℓ tiene su centro en el punto (x_1^ℓ, x_2^ℓ) y lados paralelos a los ejes coordenados X_1, X_2, de longitudes h_ℓ y k_ℓ respectivamente. Denotemos por h, (resp. h')

a la mayor (resp. la menor) de tales longitudes. Por regularidad de la partición $\mathcal{P}$ se entiende que:

$$\exists\, C_1 > 0 \text{ tal que } \frac{h'}{h} \geq C_1. \tag{5}$$

Consideremos el *rectángulo de referencia* $\hat{R}$ en el plano $\xi_1\xi_2$, definido por

$$\hat{R} = \{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq \xi_1 \leq 1,\ -1 \leq \xi_2 \leq 1\} \tag{6}$$

Los vértices y los puntos medios de los lados del rectángulo de referencia son los ocho nodos de $\hat{R}$ y serán denotados por $\hat{P}_1, \ldots, \hat{P}_8$. Consideremos el espacio de polinomios $\hat{\mathbb{P}}$ generado por 1, ξ_1, ξ_2, ξ_1^2, $\xi_1\xi_2$, ξ_2^2, $\xi_1^2\xi_2$ y $\xi_1\xi_2^2$. Si denotamos por $\hat{\mathbb{P}}_n$ y $\hat{\mathbb{P}}_{n\times n}$ al espacio de los polinomios de grado n y de grado n en cada variable, respectivamente; entonces se cumple:

$$\hat{\mathbb{P}}_2 \subseteq \hat{\mathbb{P}} \subseteq \hat{\mathbb{P}}_{2\times 2}. \tag{7}$$

Si $\hat{u}$ es una función definida en $\hat{R}$, entonces existe un único polinomio $\hat{u}_I \in \hat{\mathbb{P}}$ el cual lo interpola en los ocho nodos mencionados anteriormente.

A cada elemento rectangular R_ℓ le podemos asociar una transformación afín inversible T_ℓ la cual mapea el rectángulo de referencia $\hat{R}$ sobre R_ℓ. Explícitamente:

$$\begin{array}{llll} T_\ell : & \hat{R} & \to & R_\ell \\ & (\xi_1, \xi_2) & \mapsto & T_\ell(\xi_1, \xi_2) = (x_1^\ell + \frac{h_\ell}{2}\xi_1, x_2^\ell + \frac{k_\ell}{2}\xi_2) \end{array} \tag{8}$$

Si denotamos por $J(T_\ell)$ a la matriz Jacobiana de T_ℓ, un sencillo cálculo nos muestra que:

$$det J(T_\ell) = \frac{h_\ell k_\ell}{4} \quad \text{y} \quad det J(T_\ell^{-1}) = \frac{4}{h_\ell k_\ell},\ \forall\, \ell \in \Lambda \tag{9}$$

$$\| J(T_\ell) \| \leq \frac{h}{2} \quad \text{y} \quad \| J(T_\ell^{-1}) \| \leq \frac{2}{h'},\ \forall\, \ell \in \Lambda \tag{10}$$

Si φ es una función real definida en R_ℓ, denotaremos

$$\hat{\varphi}_\ell = \varphi \circ T_\ell, \forall \ell \in \Lambda \tag{11}$$

Cuando no exista peligro de confusión, suprimiremos el subíndice ℓ. Por la regla de la cadena y (5), tenemos:

$$\widehat{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}} \leq C h^{-1} \left| \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x_i} \right|, \, 1 \leq i \leq 2, \, \forall \ell \in \Lambda \tag{12}$$

El espacio de elementos finitos $\mathcal{M}_h$ que usaremos, es definido como:

$$\mathcal{M}_h = \left\{ v \in H_0^1(\Omega) : v\big|_{R_\ell} \in \hat{\mathbb{P}}, \forall \ell \in \Lambda \right\} \tag{13}$$

3 Fórmulas de Cuadraturas para la Evaluación de Integrales

Definiremos la *solución aproximada* del problema (4) como la función $u_h \in \mathcal{M}_h$ la cual satisface

$$a(u_h, v) = (f|v)_{0,\Omega}, \, \forall v \in \mathcal{M}_h$$

Desde que los términos de $a(\cdot,\cdot)$ son integrales las cuales no siempre pueden ser calculadas, vamos a considerar *fórmulas de cuadratura* $\hat{I}$ con coeficientes positivos, definidas en el rectángulo de referencia $\hat{R}$. Necesitamos además que $\hat{I}$ interpole exactamente los polinomios de $\hat{\mathbb{P}}_{4\times 4}$:

$$\left| \begin{array}{ll} \hat{I}(\hat{\varphi}) = \sum\limits_k \hat{A}_k \hat{\varphi}(\hat{\alpha}_k), & \hat{A}_k > 0, \forall k \\ \hat{I}(\hat{\varphi}) = \int\limits_{\hat{R}} \hat{\varphi}(\xi) d\xi, & \forall \hat{\varphi} \in \hat{\mathbb{P}}_{4\times 4} \end{array} \right. \tag{14}$$

donde los $\hat{\alpha}_k$ son puntos interiores o nodos de $\hat{R}$.

Si φ es una función real definida sobre R_ℓ, podemos considerar fórmulas de cuadratura $I_\ell(\varphi)$ sobre R_ℓ, usando $\hat{I}$:

$$I_\ell(\varphi) = \frac{h_\ell k_\ell}{4}\hat{I}(\hat{\varphi}), \; \forall\, \ell \in \Lambda. \tag{15}$$

Denotamos por $\hat{E}(\hat{\varphi})$ al *error de cuadratura* sobre $\hat{R}$, es decir:

$$\hat{E}(\hat{\varphi}) = \int_{\hat{R}} \hat{\varphi} d\xi - \hat{I}(\hat{\varphi}). \tag{16}$$

Usamos $\hat{I}$ para aproximar $a(\cdot,\cdot)$, $|\cdot|_{1,\Omega}$ y $(\cdot|\cdot)_{0,\Omega}$, de la siguiente manera:

Definición 3.1

1. $a_h(u,v) = \sum_{\ell\in\Lambda} \frac{h_\ell k_\ell}{4}\hat{I}\left[\sum_{i,j=1}^{2}\left(\hat{a}_{ij}\frac{\widehat{\partial u}}{\partial x_i}\frac{\widehat{\partial v}}{\partial x_j}\right) + \hat{b}\hat{u}\hat{v}\right] \forall\, u, v \in H_0^1(\Omega)$

2. $|v|_{1,h}^2 = \sum_{\ell\in\Lambda} \frac{h_\ell k_\ell}{4}\hat{I}\left[\left(\frac{\widehat{\partial v}}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\widehat{\partial v}}{\partial x_2}\right)^2\right], \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)$

3. $(u|v)_{0,h} = \sum_{\ell\in\Lambda} \frac{h_\ell k_\ell}{4}\hat{I}\left[\hat{u}\hat{v}\right], \quad \forall\, u, v \in L^2(\Omega).$

La solución aproximada del problema (4) es un elemento $u_h \in \mathcal{M}_h$ que satisface

$$a_h(u_h, v) = (f|\,v)_{0,\Omega}, \quad \forall\, v \in \mathcal{M}_h \tag{17}$$

La existencia y unicidad del problema aproximado (17) depende del hecho que $a_h(\cdot,\cdot)$ es una forma bilineal, simétrica, continua y coerciva sobre $\mathcal{M}_h$, lo cual será probado en la próxima sección. Finalmente, observe que por simplicidad, estamos asumiendo que $(f|\,v)_{0,\Omega}$ es integrada exactamente, si esto no ocurriera, podemos considerar $(f|\,v)_{0,h}$.

4 Algunos Lemas Previos

Uno de los resultados básicos usados en el presente trabajo es el siguiente:

Lema de Bramble-Hilbert. Denotemos por $\mathbb{P}_m$ al espacio de polinomios en la variable $x = (x_1, \ldots, x_n)$ con coeficientes reales de grado $\leq m$. Sea Ω un subconjunto abierto, acotado, conexo de $\mathbb{R}^n$ y con la propiedad del cono interior descrito en el Teorema de Calderón [2], [5], $1 \leq p < \infty$. Entonces:

1. $\exists\, C > 0$ tal que si $u \in W^{m,p}(\Omega)$ y $\displaystyle\int_\Omega D^\beta u = 0$, $\forall\, |\beta| \leq m - 1$, entonces
$$||u||_{m,p,\Omega} \leq C|u|_{m,p,\Omega}.$$

2. De (1), $\forall\, w \in W^{m,p}(\Omega)$, $\forall\, q \in \mathcal{P}_{m-1}$ tal que
$$||w - q||_{m,p,\Omega} \leq C|w|_{m,p,\Omega}.$$

3. $||w||_{m,p,\Omega} \leq \inf\limits_{q \in \mathcal{P}_{m-1}} ||w - q||_{m,p,\Omega} \leq C|w|_{m,p,\Omega}.$

El lector puede encontrar la demostración del Lema de Bramble-Hilbert en [5].

El siguiente Lema será usado frecuentemente y es una consecuencia inmediata del Lema de Bramble-Hilbert :

Lema 4.1. Sea Ω un subconjunto abierto, conexo y acotado de $\mathbb{R}^m$ tal que su frontera Γ es regular en el sentido de A. P. Calderón [2]. Si $L : H^{k+1}(\Omega) \to \mathbb{R}$ es un funcional lineal acotado sobre $H^{k+1}(\Omega)$ (con $C > 0$ una constante de acotación), que se anula sobre $\mathbb{P}_k$, entonces $\exists\, C^* = C^*(\Omega) > 0$ tal que

$$|L(u)| \leq C^* C |u|_{k+1,\Omega}, \quad \forall\, u \in H^{k+1}(\Omega).$$

Corolario. $|\hat{E}(\hat{u})| \leq C\, |\hat{u}|_{k,\hat{R}}$, $\forall\, \hat{u} \in H^k(\hat{R})$, donde $2 \leq k \leq 5$.

Demostración. Se sigue del hecho que $\hat{E} : H^k(\hat{R}) \to \mathbb{R}$ es un funcional lineal acotado que se anula sobre $\mathbb{P}_k$ y que la fórmula de cuadratura $\hat{I}$ es exacta sobre $\hat{\mathbb{P}}_{4\times 4} \supseteq \hat{\mathbb{P}}_4$. □

El siguiente resultado es una consecuencia directa del Lema de Bramble-Hilbert y del hecho que nuestro operador de interpolación deja fijos los polinomios de $\hat{\mathbb{P}}_2$.

Lema 4.2. Si $\hat{u} \in H^3(\hat{R})$, entonces

$$|\hat{u} - \hat{u}_I|_{j,\hat{R}} \leq C\, |\hat{u}|_{3,\hat{R}}, \quad 0 \leq j \leq 3.$$

Observación. De ahora en adelante, C denotará una constante positiva no necesariamente la misma en cada ocasión.

Lema 4.3. Cada $\hat{v} \in \mathbb{P}_3$ satisface:

1. $|\hat{v}|_{j,\hat{R}} \leq C\, |\hat{v}|_{i,\hat{R}}$, $0 \leq i < j \leq 3$.
2. $\max_{\hat{R}} |D^\alpha \hat{v}| \leq C\, |\hat{v}|_{|\alpha|,\hat{R}}$, $|\alpha| \leq 3$.

Demostración. Es una consecuencia directa del Lema de Bramble-Hilbert y del hecho que $\mathbb{P}_3$ es un espacio finito dimensional. □

Observación. El Lema 4.3 es válido para cualquier espacio de polinomios $\mathbb{P}_k$ y toda región de $\mathbb{R}^2$ que satisface las condiciones de A. P. Calderón.

El siguiente resultado está fuertemente relacionado con la definición de T_ℓ y sirve para trabajar en el rectángulo de referencia $\hat{R}$ en vez de cada rectángulo R_ℓ. Su prueba es una consecuencia del cambio de coordenadas de una integral doble.

Lema 4.4. Si $v \in H^m(R_\ell)$, con $m \geq 0$, entonces

$$|\hat{v}|_{m,\hat{R}} \leq C h^{m-1} |v|_{m,R_\ell}, \; \forall\, \ell \in \Lambda.$$

Lema 4.5. $[a_h(\cdot,\cdot)]^{1/2}$ es una norma sobre $\mathcal{M}_h$, equivalente a la norma $|\cdot|_{1,\Omega}$.

Demostración. Es suficiente probar que $a_h(\cdot,\cdot)$ es una forma bilineal, simétrica, continua y definida positiva sobre $\mathcal{M}_h$, puesto que de esta manera, $a_h(\cdot,\cdot)$ definiría un producto interno el cual a su vez definiría una norma $[a_h(\cdot,\cdot)]^{1/2}$ equivalente a $|\cdot|_{1,\Omega}$ sobre $\mathcal{M}_h$ puesto que $\mathcal{M}_h$ es un subespacio finito dimensional de $H_0^1(\Omega)$.

La bilinealidad y simetría de $a_h(\cdot,\cdot)$ son evidentes, mientras que la continuidad se deduce de la definición de $a_h(\cdot,\cdot)$, (a) - (d) de (3), (12) y los Lemas 4.3 y 4.4. Por lo tanto, sólo falta probar la coercividad.

Sea $u \in \mathcal{M}_h$, por (c) y (d) de (3) y (14), tenemos

$$\begin{aligned}
a_h(u,u) &= \sum_{\ell\in\Lambda}\frac{h_\ell k_\ell}{4}\left[\sum_{i,j=1}^{2}\hat{I}\left(\hat{a}_{ij}\widehat{\frac{\partial u}{\partial x_i}}\widehat{\frac{\partial u}{\partial x_j}}\right)+\hat{I}(\hat{b}\hat{u}^2)\right]\\
&= \sum_{\ell\in\Lambda}\frac{h_\ell k_\ell}{4}\sum_{k}\hat{A}_k\left[\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}(\alpha_k)\widehat{\frac{\partial u}{\partial x_i}}(\hat{\alpha}_k)\widehat{\frac{\partial u}{\partial x_j}}(\hat{\alpha}_k)+\right.\\
&\qquad \left. b(\alpha_k)\hat{u}^2(\hat{\alpha}_k)\right], \quad (\alpha_k = T_\ell(\hat{\alpha}_k))\\
&\geq \sum_{\ell\in\Lambda}\frac{h_\ell k_\ell}{4}\sum_{k}\hat{A}_k\alpha_0\sum_{i=1}^{2}\left(\widehat{\frac{\partial u}{\partial x_i}}\right)^2(\hat{\alpha}_k)\\
&= \alpha_0\sum_{\ell\in\Lambda}\frac{h_\ell k_\ell}{4}\hat{I}\left[\left(\widehat{\frac{\partial u}{\partial x_1}}\right)^2+\left(\widehat{\frac{\partial u}{\partial x_2}}\right)^2\right]\\
&= \alpha_0\int_\Omega|\nabla u|^2dx = \alpha_0|u|_{1,\Omega}.
\end{aligned}$$

□

Observación. El Lema 4.5 prueba la existencia y unicidad del problema aproximado (17).

Los Lemas siguientes, basados en la exactitud de $\hat{I}$ sobre $\mathbb{P}_{4\times 4}$, establecen la existencia de otra norma y otro producto interno sobre $\mathcal{M}_h$ (ver Definición 4.1).

Lema 4.6. $|v|_{1,h} = |v|_{1,\Omega}$, $\forall\, v \in \mathcal{M}_h$.

Lema 4.7. $(\cdot,\cdot)_{0,h}$ es un producto interno sobre $\mathcal{M}_h$.

De acuerdo con los Lemas 4.6 y 4.7, podemos definir los espacios de Hilbert $H_h^1(\Omega)$ y $L_h^2(\Omega)$ como

$$H_h^1(\Omega) \equiv (\mathcal{M}_h, a_h(\cdot,\cdot))\,, \quad L_h^2(\Omega) \equiv (\mathcal{M}_h, (\cdot,\cdot)_{0,h}) \tag{18}$$

Los Lemas siguientes serán útiles en el estudio de la superconvergencia:

Lema 4.8. Si $u \in H^4(R_\ell)$ y $a_{ij} \in H^{3,\infty}(R\ell)$, $(1 \leq i,j \leq 2)$, entonces

$$\left|\hat{E}\left[\sum_{i,j=1}^{2}\left(\hat{a}_{ij}\frac{\widehat{\partial u}}{\partial x_i}\frac{\widehat{\partial v}}{\partial x_j}\right)+\hat{b}\hat{u}\hat{v}\right]\right| \leq Ch \,\|\, u \,\|_{4,R_\ell}\|\, v \,\|_{1,R_\ell}, \quad \forall \hat{v} \in \hat{\mathbb{P}}$$

Demostración. Dado $\hat{v} \in \hat{\mathbb{P}}$, por la linealidad de $\hat{E}$, tenemos:

$$\begin{aligned}\left|\hat{E}\left[\sum_{i,j=1}^{2}\left(\hat{a}_{ij}\frac{\widehat{\partial u}}{\partial x_i}\frac{\widehat{\partial v}}{\partial x_j}\right)+\hat{b}\hat{u}\hat{v}\right]\right| \quad &\leq \quad \sum_{i,j=1}^{2}\left|\hat{E}\left(\hat{a}_{ij}\frac{\widehat{\partial u}}{\partial x_i}\frac{\widehat{\partial v}}{\partial x_j}\right)\right| + \\ &\quad + \left|\hat{E}\left(\hat{b}\hat{u}\hat{v}\right)\right| \end{aligned} \tag{19}$$

Definimos la función $L_j : H^3(\hat{R}) \to \mathbb{R}$ como $L_j(\hat{\sigma}) = \hat{E}\left(\hat{\sigma}\dfrac{\widehat{\partial v}}{\partial x_j}\right)$, $j = 1, 2$. Claramente L_1 y L_2 son lineales. Para probar la continuidad usamos el teorema de inmersión de Sobolev y los Lemas 4.3 y 4.4:

$$\begin{aligned}
|L_j(\hat{\sigma})| &= \left| \int_{\hat{R}} \hat{\sigma} \widehat{\frac{\partial v}{\partial x_j}} d\xi - \sum_k \hat{A}_k \hat{\sigma}(\hat{\alpha}_k) \widehat{\frac{\partial v}{\partial x_j}}(\hat{\alpha}_k) \right| \\
&\leq |\hat{\sigma}|_{0,\hat{R}} \left| \widehat{\frac{\partial v}{\partial x_j}} \right|_{0,\hat{R}} + Ch^{-1} \sum_k \hat{A}_k \max_{\hat{R}} |\hat{\sigma}| \max_{\hat{R}} \left| \widehat{\frac{\partial v}{\partial x_j}} \right| \\
&\leq Ch^{-1} \left[\| \hat{\sigma} \|_{s,\hat{R}} \left| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right|_{0,R_\ell} + \| \hat{\sigma} \|_{s,\hat{R}} |\hat{v}|_{1,\hat{R}} \right] \\
&\leq Ch^{-1} |v|_{1,R_\ell} \| \hat{\sigma} \|_{s,\hat{R}}
\end{aligned}$$

De esta manera, por el Lema 4.1

$$|L_j(\hat{\sigma})| \leq Ch^{-1} |v|_{1,R_\ell} |\hat{\sigma}|_{s,\hat{R}} \leq Ch\, |v|_{1,R_\ell} |\sigma|_{s,R_\ell},$$

entonces

$$\left| \hat{E}\left(\hat{\sigma} \widehat{\frac{\partial v}{\partial x_j}} \right) \right| \leq Ch\, |v|_{1,R_\ell} |\sigma|_{s,R_\ell}, \quad \forall \sigma \in H^3(R_\ell),\ j = 1, 2. \tag{20}$$

Haciendo $\sigma = a_{ij} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in H^3(R_\ell)$, $1 \leq i, j \leq 2$ en (20) y por la fórmula de Leibnitz:

$$\begin{aligned}
\left| \hat{E}\left(\hat{a}_{ij} \widehat{\frac{\partial u}{\partial x_i}} \widehat{\frac{\partial v}{\partial x_j}} \right) \right| &\leq Ch \left| a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_{s,R_\ell} |v|_{1,R_\ell} \\
&= Ch \left[\sum_{|\alpha|=3} \left\| \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta}(a_{ij}) D^\beta \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{0,R_\ell}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \cdot |v|_{1,R_\ell} \\
&\leq Ch \left[\sum_{|\alpha|=3} \sum_{\beta \leq \alpha} \|a_{ij}\|_{3,\infty,R_\ell}^2 \left\| D^\beta \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{0,R_\ell}^2 \right]^{\frac{1}{2}} |v|_{1,R_\ell} \\
&\leq Ch \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{3,R_\ell} \cdot |v|_{1,R_\ell}
\end{aligned}$$

luego

$$\sum_{i,j=1}^{2} \left| \hat{E}\left(\hat{a}_{ij} \frac{\widehat{\partial u}}{\partial x_i} \frac{\widehat{\partial v}}{\partial x_j} \right) \right| \quad \leq \quad Ch \parallel u \parallel_{4,R_\ell} |v|_{1,R_\ell} \tag{21}$$

Para acotar el segundo sumando de (19), definimos $L : H^3(\hat{R}) \to \mathbb{R}$ como $L(\hat{\sigma}) = \hat{E}(\hat{b}\hat{\sigma}\hat{v})$. Claramente L es lineal y procediendo análogamente que con los L_j, se sigue que

$$|L(\hat{\sigma}) = | \leq Ch^{-1}|v|_{0,R_\ell} \|\hat{\sigma}\|_{3,\hat{R}}$$

y si $\hat{\sigma} \in \hat{\mathbb{P}}_2$ entonces $\hat{\sigma}\hat{v} \in \mathbb{P}_{4\times 4}$, se sigue que $L(\hat{\sigma}) = 0$. Por el Lema 4.1 y la definición de L:

$$|\hat{E}(\hat{b}\hat{\sigma}\hat{v})| \leq Ch|v|_{0,R_\ell}|\sigma|_{3,R_\ell},\ \forall\, \sigma \in H^3(R_\ell).$$

Desde que $u \in H^4(R_\ell)$, tenemos.

$$|\hat{E}(\hat{b}\hat{\sigma}\hat{v})| \leq Ch|v|_{0,R_\ell}\|u\|_{4,R_\ell} \tag{22}$$

Reemplazando (21) y (22) en (19), el resultado se sigue. □

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata del Lema anterior:

Corolario. Si $u \in H^4(\Omega)$ y $a_{ij} \in H^{3,\infty}(\Omega)$, $(1 \leq i, j \leq 2)$, entonces

$$|a(u,v) - a_h(u,v)| \ \leq \ Ch^3 \ \parallel u \parallel_{4,\Omega} \parallel v \parallel_{1,\Omega},\ \forall\, v \in \mathcal{M}_h$$

Lema 4.9. En las condiciones del Corolario anterior, se cumple:

$$|a_h(u - u_I, v)| \ \leq \ Ch^3 \ \parallel u \parallel_{4,\Omega} \parallel v \parallel_{1,\Omega},\ \forall\, v \in \mathcal{M}_h$$

Demostración. Para cada $v \in \mathcal{M}_h$ tenemos

$$|a_h(u - u_I, v)| \leq \sum_{\ell \in \Lambda} \frac{h_\ell k_\ell}{4} \left| \hat{E}\left[\sum_{i,j=1}^{2} \left(\hat{a}_{ij} \frac{\partial \widehat{(u - u_I)}}{\partial x_i} \frac{\widehat{\partial v}}{\partial x_j} \right) + \hat{b}(\hat{u} - \hat{u}_I)\hat{v} \right] \right|$$

$$+\sum_{\ell\in\Lambda}\frac{h_\ell k_\ell}{4}\left|\int_{\hat{R}}\left[\sum_{i,j=1}^{2}\left(\hat{a}_{ij}\frac{\partial\widehat{(u-u_I)}}{\partial x_i}\frac{\widehat{\partial v}}{\partial x_j}\right)+\hat{b}(\hat{u}-\hat{u}_I)\hat{v}\right]d\xi\right| \qquad (23)$$

Por el Lema 4.8 y desde que $||u_I||_{4,R_\ell} \leq C\,||u||_{4,R_\ell}$, tenemos:

$$\left|\hat{E}\left[\sum_{i,j=1}^{2}\left(\hat{a}_{ij}\frac{\partial\widehat{(u-u_I)}}{\partial x_i}\frac{\widehat{\partial v}}{\partial x_j}\right)+\hat{b}(\hat{u}-\hat{u}_I)\hat{v}\right]\right| \leq Ch\,||u||_{4,R_\ell}||v||_{1,R_\ell}$$

Sumando para todo $\ell \in \Lambda$ y aplicando la desigualdad de Poincaré, tenemos:

$$\sum_{\ell\in\Lambda}\frac{h_\ell k_\ell}{4}\left|\hat{E}\left[\sum_{i,j=1}^{2}\left(\hat{a}_{ij}\frac{\partial\widehat{(u-u_I)}}{\partial x_i}\frac{\widehat{\partial v}}{\partial x_j}\right)+\hat{b}(\hat{u}-\hat{u}_I)\hat{v}\right]\right| \leq Ch^3\,||u||_{4,\Omega}|v|_{1,\Omega} \qquad (24)$$

De los Lemas 4.2 y 4.4, deducimos fácilmente que

$$\sum_{\ell\in\Lambda}\frac{h_\ell k_\ell}{4}\left|\int_{\hat{R}}\hat{b}(\hat{u}-\hat{u}_I)\hat{v}d\xi\right| \leq Ch^3\,||u||_{4,\Omega}|v|_{1,\Omega} \qquad (25)$$

Finalmente, usando las ideas introducidas por Zlámal [7], [8], llegamos a

$$\sum_{\ell\in\Lambda}\frac{h_\ell k_\ell}{4}\sum_{i,j=1}^{2}\left|a_{ij}\int_{\hat{R}}\frac{\partial(\hat{u}-\hat{u}_I)}{\partial\xi_i}\frac{\partial\hat{v}}{\partial\xi_j}d\xi\right| \leq Ch^3\,||u||_{4,\Omega}|v|_{1,\Omega} \qquad (26)$$

Reemplazando (24), (25) y (26) en (23), el Lema se sigue. □

Lema 4.10. Sean $u \in H^4(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ solución de (4) y $u_h \in \mathcal{M}_h$ solución del problema aproximado (17). Si $a_{ij} \in H^{3,\infty}(\Omega)$ para todo $1 \leq i,j \leq 2$, entonces

$$|u_I - u_h|_{1,h} \leq Ch^3 \ \| u \|_{4,\Omega}$$

Demostración. Para cada $v \in \mathcal{M}_h \subseteq H_0^1(\Omega)$, de la hipótesis y por (4) y (17) se sigue que

$$a(u,v) = a_h(u_h, v),$$

luego

$$|a_h(u_I - u_h, v)| \leq |a_h(u - u_I, v)| + |a(u,v) - a_h(u,v)|$$

por el Lema 4.9 y el Corolario al Lema 4.8, tenemos:

$$|a_h(u_I - u_h, v)| \leq Ch^3 \|u\|_{4,\Omega} |v|_{1,\Omega}, \ \forall v \in \mathcal{M}_h$$

Haciendo $v = u - u_I \in \mathcal{M}_h$ en la desigualdad anterior y por el Lema 4.5:

$$\alpha_0 |u_I - u_h|_{1,\Omega}^2 \leq a_h(u_I - u_h, u_I - u_h) \leq Ch^3 \|u\|_{4,\Omega} |u_I - u_h|_{1,\Omega}$$

De lo anterior y por el Lema 4.6, se sigue la demostración del Lema 5.10. □

Observación. El Lema 4.10 puede ser usado para construir operadores de recubrimiento tal como se hace en el trabajo de Durán, Muschietti y Rodríguez [4], los cuales están muy relacionados con el estudio de los estimadores asintóticamente exactos de errores a posteriori.

5 Resultados de Superconvergencia

Lo que sigue es una modificación del trabajo de Andreev-Lazarov [1] adaptado a elementos finitos rectangulares como los considerados en la sección 2, los cuales son un caso particular de los estudiados por Lesaint-Zlámal [6]. Consideremos la seminorma $|\cdot|_{1,h}^*$ definida por:

$$|v|_{1,h}^* = \left\{ \sum_{\ell \in \Lambda} \sum_{m=1}^{4} \left[\left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi_1} \right)^2 (\hat{Q}_m) + \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi_2} \right)^2 (\hat{Q}_m) \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (27)$$

donde $\hat{Q}_m = \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \right)$. Existe una relación entre $|\cdot|^*_{1,h}$ y $|\cdot|_{1,h}$ para elementos de $\mathcal{M}_h$:

Lema 5.1. $|v|^*_{1,h} \leq C\,|v|_{1,h}$, $\forall\, v \in \mathcal{M}_h$.

Demostración. Para cualquier $v \in \mathcal{M}_h$, se cumple:

$$\begin{aligned} |v|^{*^2}_{1,h} &\leq \sum_{\ell\in\Lambda}\sum_{m=1}^{4}\left[\left(\max_{\hat{R}}\frac{\partial\hat{v}}{\partial\xi_1}\right)^2 + \left(\max_{\hat{R}}\frac{\partial\hat{v}}{\partial\xi_2}\right)^2\right] \\ &\leq C\sum_{\ell\in\Lambda}|v|^2_{1,\hat{R}} \leq C\,|v|^2_{1,\Omega} = C\,|v|^2_{1,h} \end{aligned}$$

□

Teorema 5.2. Sean $u \in H^4(\Omega)\cap H^1_0(\Omega)$ solución de (4), $u_h \in \mathcal{M}_h$ una solución del problema aproximado (17) y suponga que $a_{ij} \in H^{3,\infty}(\Omega)$, $\forall\, 1 \leq i,j \leq 2$. Entonces

$$|u-u_h|^*_{1,h} \leq Ch^3\|u\|_{4,\Omega}$$

Demostración. Por la desigualdad triangular:

$$|u-u_h|^*_{1,h} \leq |u-u_I|^*_{1,h} + |u_I-u_h|^*_{1,h} \tag{28}$$

De los Lemas 4.10 y 5.1:

$$|u_i-u_h|^*_{1,h} \leq Ch^3\|u\|_{4,\Omega} \tag{29}$$

Para acotar el primer sumando de (28), definimos las funciones F_{im} : $H^4(\hat{R}) \to \mathbb{R}$ por $F_{im} = \dfrac{\partial(\hat{u}-\hat{u}_I)}{\partial\xi_i}(\hat{Q}_m)$, donde $i=1,2$, $1 \leq m \leq 4$. La linealidad de los F_{im} es evidente, además es fácil ver que:

$$|F_{im}(\hat{u})| \leq C\,\|\hat{u}\|_{4,\hat{R}},\ \forall\,\hat{u} \in H^4(\hat{R}).$$

Sólo probaremos la anulación de F_{1m} sobre los polinomios de $\hat{\mathbb{P}}_3$, la de F_{2m} se demuestra de manera análoga. Si $\hat{u} \in \hat{\mathbb{P}}$ ó $\hat{u} = \xi_2^3$, el resultado es trivial. Si $\hat{u} = \xi_1^3$ entonces $u_I = \xi_1$, entonces $\dfrac{\partial(\hat{u} - \hat{u}_I)}{\partial \xi_1} = 3\xi_1^2 - 1$, cuyas raíces son $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, son las abscisas de $\hat{Q}_m$, entonces $F_{1m}(\hat{u}) = 0$ y por el Lema 4.1:

$$\left|\frac{\partial(\hat{u} - \hat{u}_I)}{\partial \xi_i}(\hat{Q}_m)\right| \leq C\,|\hat{u}|_{4,\hat{R}},\ \forall\, \hat{u} \in H^4(\hat{R}) \text{ con } i = 1,2,\ 1 \leq m \leq 4.$$

Luego:

$$\begin{aligned} |u - u_h|_{1,h}^{*2} &\leq \sum_{\ell\in\Lambda}\sum_{i=1}^{4}\left[\frac{\partial(\hat{u} - \hat{u}_I)^2}{\partial \xi_1}(\hat{Q}_m) + \frac{\partial(\hat{u} - \hat{u}_I)^2}{\partial \xi_2}(\hat{Q}_m)\right] \\ &\leq C\sum_{\ell\in\Lambda}|\hat{u}|_{4,\hat{R}} \leq Ch^6\|u\|_{4,\Omega}^2 \end{aligned}$$

es decir

$$|u - u_h|_{1,h}^{*} \leq Ch^3\|u\|_{4,\Omega} \tag{30}$$

Reemplazando (28) y (29) en (30), el Teorema se sigue. □

Observación. El Teorema 6.2 nos muestra que tenemos superconvergencia de las derivadas en las direcciones de los ejes coordenados y en los puntos $\{T_\ell(\hat{Q}_m)\}_{\ell\in\Lambda;1\leq m\leq 4}$.

6 Aplicación a Problemas Parabólicos

Como en Andreev-Lazarov [1], podemos aplicar los resultados de la sección anterior a problemas de Ecuaciones Diferenciales Parciales del tipo Parabólico. Sea $u : [0,T] \to H_0^1(\Omega)$ una solución débil del problema variacional

$$\left|\begin{array}{l} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t)|v\right)_{0,\Omega} + a(u(t),v) = (f(t)|v)_{0,\Omega} \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega),\ 0 < t < T \\ \\ u(x,0) = u_0(x) \end{array}\right. \tag{31}$$

Aquí $a(\cdot,\cdot)$ es la forma bilineal de la sección 1. Sea u_h la solución al problema aproximado:

$$\left| \begin{array}{l} \left(\frac{\partial u_h}{\partial t}(t)|v\right)_{0,h} + a_h(u_h(t),v) = (f(t)|v)_{0,\Omega} \quad \forall v \in \mathcal{M}_h,\ 0 < t < T \\ \\ u_h(0) = u_I(0) \end{array} \right. \tag{32}$$

donde $u_h : [0,T] \to \mathcal{M}_h$. Consideremos los espacios $L^p(0,T;X) \equiv L^p[X]$, $1 \leq p \leq \infty$, con normas:

$$\begin{aligned} \|u\|^p_{L^p[X]} &= \int_0^t \|u(t)\|^p_X dt,\ 1 \leq p < \infty \\ \|u\|_{L^\infty[X]} &= \operatorname{supess}\{\|u(t)\|_X : 0 < t < T\} \end{aligned}$$

Ahora consideraremos la norma semidiscreta:

$$|\!|\!| \cdot |\!|\!|^2_{1,h} = \|\cdot\|^2_{L^\infty[L^2_h]} + \|\cdot\|^2_{L^\infty[H^1_h]} \tag{33}$$

donde L^2_h y H^1_h son como en (18). Introducimos también la seminorma:

$$|\cdot|^{*^2}_{1,h,t} = \int_0^T |\cdot|^{*^2}_{1,h} \tag{34}$$

con $|\cdot|^{*^2}_{1,h}$ como en (27).

Los dos resultados siguientes, cuya prueba es completamente similar a la dada en el trabajo de Andreev-Lazarov mencionado anteriormente, establece la superconvergencia del gradiente para este tipo de problemas usando elementos finitos rectangulares. En realidad, los Lemas de la sección 4 sirven para seguir el esquema de [1].

Lema 6.1. Si $u \in L^2\left[H^4(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)\right]$ es la solución de (31) tal que $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^2\left[H^3(\Omega)\right]$, u_h es la solución del problema aproximado (32) y $a_{ij} \in H^{3,\infty}(\Omega)$, $\forall\, 1 \leq i,j \leq 2$, entonces

$$|\!|\!| u_h - u_I |\!|\!|_{1,h} \leq Ch^3 \left(\|u\|_{L^2[H^4(\Omega)]} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^2[H^3(\Omega)]} \right)$$

Teorema 6.2. En las condiciones del Lema 6.1, se cumple:

$$|u-u_h|^*_{1,h,t} \leq Ch^3 \left(\|u\|_{L^2[H^4(\Omega)]} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^2[H^3(\Omega)]} \right)$$

7 Aplicación a Problemas Hiperbólicos

Vamos a aplicar los resultados obtenidos en las secciones anteriores a problemas hiperbólicos del tipo mixto.

Sean $u : [0,T] \to H^1_0(\Omega)$ y $u_h : [0,T] \to \mathcal{M}_h$ soluciones de los problemas

$$\left| \begin{array}{l} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t)|v\right)_{0,\Omega} + a(u(t),v) = (f(t)|v)_{0,\Omega} \quad \forall v \in H^1_0(\Omega), 0<t<T \\ \\ u(x,0) = u_0(x) \\ \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x) \end{array} \right. \tag{35}$$

$$\left| \begin{array}{l} \left(\frac{\partial^2 u_h}{\partial t^2}(t)|v\right)_{0,h} + a_h(u_h(t),v) = (f(t)|v)_{0,\Omega} \quad \forall v \in \mathcal{M}_h, 0<t<T \\ \\ u_h(0) = u_I(0) \\ \\ \frac{\partial u_h}{\partial t}(0) = \frac{\partial u_I}{\partial t}(0) \end{array} \right. \tag{36}$$

respectivamente.

Introducimos la norma:

$$|\!|\!|\cdot|\!|\!|_{1,h} = \|\cdot\|_{L^\infty[H^1_h]} + \|\cdot\|_{L^\infty[L^2_h]} \tag{37}$$

la cual es más fuerte que la usada por Andreev-Lazarov en el caso parabólico, puesto que (37) usa la norma L^∞ para la variable temporal de funciones valoradas en H^1_h y L^2_h, mientras que (33) usa la norma L^2 para funciones valoradas en H^1_h.

El siguiente es el análogo hiperbólico del Lema 6.1:

Lema 7.1. Si $u \in L^\infty\left[H^4(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right]$ es la solución de (35) tal que $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty\left[H^3(\Omega)\right]$, u_h es la solución del problema aproximado (36) y $a_{ij} \in H^{3,\infty}(\Omega)$, $\forall\, 1 \le i,j \le 2$, entonces

$$\|u_h - u_I\|_{1,h} \le Ch^3 \left(\|u\|_{L^\infty[H^4(\Omega)]} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^\infty[H^3(\Omega)]} \right)$$

Demostración. Para cada $t \in [0,T]$, consideremos $z_h(t) = u_h(t) - u_I(t) \in \mathcal{M}_h$. De (35) y (36), para cualquier $v \in \mathcal{M}_h$ tenemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 z_h}{\partial t^2}(t)|\, v\right)_{0,h} + a_h(z_h(t),v) &= [a(u(t),v) - a_h(u(t),v)] + \\ a_h(u(t)-u_I(t),v) &+ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t)\frac{\partial^2 u_I}{\partial t^2}(t)|\, v\right)_{0,\Omega} + \qquad (38)\\ &+ \left[\left(\frac{\partial u_I}{\partial t}(t)|\, v\right) - \left(\frac{\partial^2 u_I}{\partial t^2}(t)|\, v\right)_{0,h}\right] \end{aligned}$$

De los Lemas 4.8 y 4.9 respectivamente, se cumple:

$$|a(u(t),v) - a_h(u(t),v)| \le Ch^3\|u(t)\|_{4,\Omega}|v|_{1,\Omega} \qquad (39)$$

$$|a_h(u(t)-u_I(t),v)| \le Ch^3\|u(t)\|_{4,\Omega}|v|_{1,\Omega} \qquad (40)$$

Desde $\hat{I}$ es exacta sobre $\hat{\mathbb{P}}_{4\times 4}$ y $v\dfrac{\partial u_I}{\partial t} \in \mathbb{P}_{4\times 4}$, tenemos:

$$\left| \left(\frac{\partial u_I}{\partial t}(t)|v\right)_{0,\Omega} - \left(\frac{\partial u_I}{\partial t}(t)|v\right)_{0,h} \right| = 0 \qquad (41)$$

Con la finalidad de acotar el tercer sumando del lado derecho de (38), denotamos $w = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t)$, luego $w_I = \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t)\right)_I = \dfrac{\partial^2 u_I}{\partial t^2}(t)$ y se cumple:

$$\begin{aligned}\left|\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t) - \frac{\partial^2 u_I}{\partial t^2}(t)|v\right)_{0,\Omega}\right| &\leq \left|\sum_{\ell\in\Lambda}\int_{R_\ell}(w - w_I)v dx\right| \\ &\leq Ch^2\sum_{\ell\in\Lambda}|\hat{w} - \hat{w}_I|_{0,\hat{R}}|\hat{v}|_{0,\hat{R}} \\ &\leq Ch^2\sum_{\ell\in\Lambda}|\hat{w}|_{3,\hat{R}}|\hat{v}|_{0,\hat{R}} \\ &\leq Ch^3\sum_{\ell\in\Lambda}|w|_{3,\Omega}|v|_{0,\Omega}\end{aligned}$$

Por la desigualdad de Poincaré:

$$\left|\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t) - \frac{\partial^2 u_I}{\partial t^2}(t)|v\right)_{0,\Omega}\right| \leq Ch^3\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t)\right\|_{3,\Omega}|v|_{1,\Omega} \tag{42}$$

Reemplazando (39), (40), (41) y (42) en (38):

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2 z_h}{\partial t^2}(t)|\, v\right)_{0,h} + a_h(z_h(t), v) &\leq Ch^3\left[\|u(t)\|_{4,\Omega} + \right. \\ &\left.\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t)\right\|_{3,\Omega}\right]|v|_{1,\Omega},\ \forall\, v \in \mathcal{M}_h\end{aligned} \tag{43}$$

Por la observación del Lema 4.3:

$$|v|_{1,\Omega}^2 = \sum_{\ell\in\Lambda}|v|_{1,R_\ell}^2 \leq C\sum_{\ell\in\Lambda}|v|_{0,R_\ell}^2 = C|v|_{0,\Omega}^2,\ \forall\, v \in \mathcal{M}_h$$

Reemplazando este resultado en (43):

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2 z_h}{\partial t^2}(t)|\, v\right)_{0,h} + a_h(z_h(t), v) &\leq Ch^3\left[\|u(t)\|_{4,\Omega} + \right. \\ &\left.\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t)\right\|_{3,\Omega}\right]|v|_{0,\Omega},\ \forall\, v \in \mathcal{M}_h\end{aligned} \tag{44}$$

Haciendo $v = \dfrac{\partial z_h}{\partial t}(t)$ en (44) y por el Lema 4.7:

$$\left(\frac{\partial^2 z_h}{\partial t^2}(t) | \frac{\partial z_h}{\partial t}(t)\right)_{0,h} + a_h\left(z_h(t), \frac{\partial z_h}{\partial t}(t)\right) \leq Ch^3 M \left|\frac{\partial z_h}{\partial t}(t)\right|_{0,h} \quad (45)$$

donde $M = \|u\|_{L^\infty[H^4(\Omega)]} + \left\|\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\|_{L^\infty[H^3(\Omega)]}$ Usando los Lemas 4.5, 4.6 y 4.7 en (45):

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left|\frac{\partial z_h}{\partial t}(t)\right|_{0,h}^2 + a_h\left(z_h(t), z_h(t)\right)\right] \leq Ch^3 M \left|\frac{\partial z_h}{\partial t}(t)\right|_{0,h}$$

integrando de 0 a t y usando las condiciones iniciales de (36):

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial z_h}{\partial t}(t)\right|_{0,h}^2 + |z_h(t)|_{1,h}^2 &\leq 2Ch^3 M T^{1/2}\left(\int_0^t \left|\frac{\partial z_h}{\partial t}(s)\right|_{0,h}^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq Ch^6 M^2 + \int_0^t \left[\left|\frac{\partial z_h}{\partial t}(s)\right|_{0,h}^2 + |z_h(s)|_{1,h}^2\right] ds\end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Gronwall, se sigue que:

$$\left|\frac{\partial z_h}{\partial t}(t)\right|_{0,h}^2 + |z_h(t)|_{1,h}^2 \leq Ch^6 M^2,\ \forall\, t \in [0, T] \quad (46)$$

De (46) se sigue inmediatamente que

$$\left\|\frac{\partial z_h}{\partial t}(t)\right\|_{L^\infty[L_h^2]} \leq Ch^3 M \quad (47)$$

$$\|z_h\|_{L^\infty[H_h^1]} \leq Ch^3 M \quad (48)$$

De aquí el Lema se sigue. □

Finalmente, para estudiar la superconvergencia del gradiente, definimos la seminorma:

$$|\cdot|_{1,h,t}^{*^2} = \sup_{0\leq t\leq T} |\cdot|_{1,h}^{*} \tag{49}$$

la cual es más fuerte que la dada por Andreev-Lazarov para el caso parabólico, porque (49) mide la superconvergencia del gradiente de las imágenes $\left\{T_\ell(\hat{Q}_m)\right\}_{\ell\in\Lambda,1\leq m\leq 4}$ para cada instante $t\in[0,T]$. Así el siguiente Teorema, cuya prueba es completamente similar a la del Teorema 6.2, mide la superconvergencia en cualquier instante.

Teorema 7.2. En las condiciones del Lema 7.1, se cumple:

$$|u-u_h|_{1,h,t}^{*} \leq Ch^3\left(\|u\|_{L^\infty[H^4(\Omega)]} + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L^2[H^3(\Omega)]}\right)$$

Observaciones.

1. Podemos extender los resultados obtenidos a transformaciones no lineales, dando condiciones apropiadas a sus Jacobianos (ver [8]).
2. La región Ω puede ser más general que la considerada aquí, por ejemplo puede ser un dominio acotado en $\mathbb{R}^2$ con frontera Γ suave por partes. Para ello, tenemos que dar algunas condiciones adicionales a la partición $\mathcal{P}$ (ver [8]).
3. Los resultados de la sección 8 para ecuaciones hiperbólicas también pueden ser obtenidos considerando elementos finitos triangulares y regiones Ω más generales (ver [1]).

Referencias

[1] Andreev, A. B., Lazarov, R. D. (1988). *Superconvergence of the Gradient for Quadratic Triangular Finite Elements"*. Num. Math. Part. Diff. Eq., 4, pp. 15-32.

[2] Calderón, A. P. (1961). *Lebesgue Space of Differentiable Functions and Distributions"*. Proc. Sym. Math. 4 pp. 33-39. Amer. Math Soc. Prov. Rhode Island.

[3] Ciarlet, P. G., Raviart, P. A. (1972). *General Lagrange and Hermite Interpolation in $\mathbb{R}^n$ with application to Finite Element Methods".* Arch. Rat. Mech. Anal. 46, pp. 177-199.

[4] Durán, R., Muschietti, M., Rodríguez, R. (1989). *Asymptotically exact error estimators for Rectangular Finite Elements".* Notas de Matemática N° 50, Univ. Nac. de la Plata, Argentina.

[5] Espinoza, P. (1990). *"Notas sobre Elementos Finitos".* Actas del Septimo Coloquio de la Sociedad Matemática Peruana, pp. 9-61.

[6] Lesaint, P., Zlámal, M. (1979). *Superconvergence of the gradient of Finite Element Solutions".* RAIRO Anal., 13, pp. 139-166.

[7] Zlámal, M. (1977). *Some Superconvergence Results in the Finite Elements Method".* Mathematical Aspects Finite Elements Methods, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, pp. 351-362.

[8] Zlámal, M. (1978). *Superconvergence and reduced integration in the Finite Elements Methods".* Math. Comp. 32, pp. 663-685.

Renato Benazic Tomé
Instituto de Matemática y Ciencias Afines
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Nacional Mayor de San Marcos.
imca@uni.edu.pe