Pro Mathematica Vol. XV, Nos. 29-30

LA MENOR SUMA DE GRADOS QUE CONDUCE A SUCESIONES POTENCIALMENTE P_K - BIPARTITAS GRÁFICAS

Daniel **Brito**, *Gladys* **Lárez** *y Pedro* **Mago**

Resumen

Un grafo bipartito balanceado tiene la propiedad P_k si contiene un subgrafo bipartito balanceado completo de orden $2k$, y una sucesión $\Pi = (\Pi_X, \Pi_Y)$ es potencialmente P_k - bipartita gráfica si tiene una realización con la propiedad P_k. Sea $\sigma(k, 2n)$ la menor suma de grados tal que toda sucesión bipartita gráfica Π de $2n$ términos sin ceros y con suma de grados $\sigma(\Pi) \geq \sigma(k, 2n)$ es potencialmente P_k - bipartita gráfica. En este artículo se conjetura que $\sigma(k, 2n) = 2(k-1)(2n-k) + 2k$, y se prueba que esto es cierto para $k = 2$ y 3.

Palabras claves: bipartito, balanceado, bigráfica.

Departamento de Matemáticas, Universidad de Oriente, Venezuela.

1 Introducción

Sea $G = (X, Y, E)$ un grafo bipartito balanceado de orden $2n$, con $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ y $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ y sean $a_i = d_G(x_i)$ y $b_i = d_G(y_i)$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Una sucesión de enteros no negativos $\Pi = (d_1, d_2, \ldots, d_n, d_{n+1}, \ldots, d_{2n})$ se llama una sucesión de grados bipartita si $a_i = d_i$ y $b_i = d_{n+i}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. En este caso usaremos la notación $\Pi(G) = (\Pi_X, \Pi_Y)$, donde $\Pi_X = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $\Pi_Y = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

Una sucesión $S = (S_1, S_2)$ es bipartita gráfica si existe un grafo bipartito G para el cual $\Pi(G) = S$. El grafo resultante G, el cual en general no es único, se llama una realización de S.

Sea $\Pi = (\Pi_X, \Pi_Y)$ una sucesión bipartita gráfica, con

$$\Pi_X = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad \text{y} \quad \Pi_Y = (b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

Denotamos $\sigma(\Pi_X) = \sum_{i=1}^{n} a_i, \sigma(\Pi_Y) = \sum_{i=1}^{n} b_i$. Y $\sigma(\Pi) = \sigma(\Pi_X) + \sigma(\Pi_Y)$ se llama la suma de grados de la sucesión.

Decimos que un grafo bipartito balanceado tiene la propiedad P_K si tiene un subgrafo bipartito balanceado completo de orden $2k$, y una sucesión bipartita gráfica $\Pi = (\Pi_X, \Pi_Y)$, con $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq 1$ y $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n \geq 1$, es potencialmente P_K - bipartita gráfica si tiene una realización con la propiedad P_K.

En [1], Erdös, Jacobson y Lehel propusieron el siguiente problema: Determinar la menor suma de grados $\sigma(k, n)$ tal que toda sucesión gráfica $\Pi = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ con $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n \geq 1$ y $\sigma(\Pi) \geq \sigma(k, n)$ es potencialmente P_K - gráfica. Donde, potencialmente P_K - gráfica en grafos significa que Π tiene una realización que contiene un subgrafo completo de orden $k + 1$. Ellos conjeturaron que

$$\sigma(k, n) = (k - 1)(2n - k) + 2,$$

y la probaron para $k = 2$.

En [2], J. S. Li y Z. X. Song probaron la conjetura para $k = 3$ y los mismos autores la probaron en [3] para $k = 4$.

En este artículo, nosotros conjeturamos que la menor suma de grados $\sigma(k, 2n)$ tal que toda sucesión bipartita gráfica $\Pi = (\Pi_X, \Pi_Y)$ con $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq 1$ y $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n \geq 1$ y $\sigma(\Pi) \geq \sigma(k, 2n)$ es potencialmente P_k - bipartita gráfica satisface

$$\sigma(k, 2n) = 2(k-1)(2n-k) + 2k$$

y la probamos para $k = 2$ y 3.

2 Resultados Principales

Lema. *Sea $\Pi = (\Pi_X, \Pi_Y)$ una sucesión bipartita gráfica. Si*

$$\sigma(\Pi) \geq 2(k-1)(2n-k) + 2k$$

entonces en Π_X y en Π_Y hay al menos k términos mayores o iguales a k.

Prueba. Puesto que cualquier realización de Π es un grafo bipartito balanceado, $\sigma(\Pi_X) = \sigma(\Pi_Y)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que en Π_X hay $k-1$ términos iguales a n y los $n-k+1$ términos restantes son iguales a $k-1$. Entonces,

$$\begin{aligned} \sigma(\Pi_X) &= (k-1)n + (n-k+1)(k-1) \\ &= (k-1)(2n-k) + (k-1). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \sigma(\Pi) = \sigma(\Pi_X) + \sigma(\Pi_Y) &= 2(k-1)(2n-k) + 2(k-1) \\ &< 2(k-1)(2n-k) + 2k, \end{aligned}$$

lo cual contradice la hipótesis.

Este lema garantiza que si la conjetura es cierta, es la mejor cota puesto que si $\sigma(k, 2n) = 2(k-1)(2n-k) + 2(k-1)$, entonces la sucesión $\Pi = (\Pi_X, \Pi_Y)$ con $\Pi_X = (n, n, \ldots, n, k-1, k-1, \ldots, k-1)$ y Π_Y

cualquier sucesión tal que $\sigma(\Pi_Y) = (k-1)(2n-k)+k-1$ no tiene ninguna realización que contenga a $K_{k,k}$. (Ver Figura 1, en anexo). □

Teorema 1. *Si* $n \geq 2$, *entonces* $\sigma(2, 2n) = 4n$, *excepto cuando* $\Pi_X = \Pi_Y = (2,2,2)$.

Prueba. Si $n=2$, la única posibilidad para Π es $\Pi_X = \Pi_Y = (2,2)$, y la única realización de esta sucesión es $K_{2,2}$.

Si $n=3$ y $\Pi_X = \Pi_Y = (2,2,2)$ entonces la única realización de Π es C_6 que no contiene a $K_{2,2,}$. Las otras posibilidades para Π son

$$\begin{array}{rclcrcl} \Pi_X & = & (3,2,1) & \text{y} & \Pi_Y & = & (2,2,2) \\ \Pi_X & = & (3,2,1) & \text{y} & \Pi_Y & = & (3,2,1) \end{array}.$$

Las realizaciones de estas sucesiones que contienen a $K_{2,2}$, se muestran en la Figura 2 (Anexo).

Para $n \geq 4$, usamos inducción sobre n. Si

$$n = 4, \sigma(\Pi_X) = \sigma(\Pi_Y) \geq 8.$$

Consideramos sólo la igualdad puesto que si hay más lados se garantizará con mayor rapidez la existencia de $K_{2,2}$. Supongamos entonces que $\sigma(\Pi_X) = \sigma(\Pi_Y) = 8$. Las posibilidades de distribuir 8 en 4 términos mayores o iguales a 1 son (2,2,2,2), (3,3,1,1), (3,2,2,1) y (4,2,1,1). Combinando estas posibilidades para Π_X y Π_Y se tienen 10 combinaciones no simétricas. En las Figuras 3 - 6 del anexo se muestran las realizaciones correspondientes que contienen a $K_{2,2}$. Además, en la Figura 7 del anexo se muestra una realización de una de estas combinaciones que no contiene a $K_{2,2}$.

Supongamos ahora que el Teorema es cierto para $n = p$. Esto es, para cualquier sucesión bipartita gráfica $\Pi = (\Pi_X, \Pi_Y)$ con

$$\Pi_X = (a_1, a_2, \ldots, a_p) \quad \text{y} \quad \Pi_Y = (b_1, b_2, \ldots, b_p)$$

tal que $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_p \geq 1$ y $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_p \geq 1$ y $\sigma(\Pi) \geq 4_p$, Π tiene una realización que contiene a $K_{2,2}$.

Probamos ahora que es cierto para $n = p + 1$. Sean

$$\Pi_X = (a_1, a_2, \ldots, a_p, a_{p+1}) \quad \text{y} \quad \Pi_Y = (b_1, b_2, \ldots, b_p, b_{p+1})$$

tal que $\sigma(\Pi_X) = \sigma(\Pi_Y) = 2p + 2$. Al distribuir $2p + 2$ en $p + 1$ términos decrecientes tal que $a_1, b_1 \leq p + 1$, se tiene que $a_{p+1}, b_{p+1} \leq 2$. En consecuencia, $\sum_{i=1}^{p} a_i + \sum_{i=1}^{p} b_i \geq 4p$ y la hipótesis inductiva garantiza la existencia de $K_{2,2}$ en alguna realización de Π

Claramente, si $\sigma(\Pi) \geq 4(p + 1)$ se tendrán más lados y por lo tanto se garantizará la existencia de $K_{2,2}$ en alguna realización de Π. □

Teorema 2. *Si $n \geq 3$, entonces $\sigma(3, 2n) = 8n - 6$, excepto cuando $\Pi_X = \Pi_Y = (4, 3, 3, 3)$.*

Prueba. Si $n = 3$, entonces $\sigma(3, 6) = 18$ y la única posibilidad para Π es $\Pi_X = \Pi_Y = (3, 3, 3)$, cuya única realización es $K_{3,3}$.

Si $n = 4$ y $\Pi_X = \Pi_Y = (4, 3, 3, 3)$, ninguna realización de Π contiene a $K_{3,3}$. (Figura 8). Las otras combinaciones no simétricas para Π son:

$$\begin{array}{lcllc}
\Pi_X & = & (4,3,3,3) & \text{y} & \Pi_Y = (4,4,3,2) \\
\Pi_X & = & (4,3,3,3) & \text{y} & \Pi_Y = (4,4,1,1) \\
\Pi_X & = & \Pi_Y & = & (4,4,3,2).
\end{array}$$

En la Figura 9 se muestran las realizaciones correspondientes que contienen a $K_{3,3}$.

Para $n \geq 5$, la prueba se hace por inducción sobre n.

Si $n = 5$, $\sigma(3, 10) = 34$, de manera que $\sigma(\Pi_X) = \sigma(\Pi_Y) \geq 17$. Las posibilidades para Π_X y Π_Y con la igualdad son (5,5,5,1,1), (5,5,4,2,1), (5,5,3,3,1), (5,4,4,3,1), (5,4,4,2,2), (5,4,3,3,2), (5,3,3,3,3), (4,4,4,4,1), (4,4,4,3,2) y (4,4,3,3,3). En cada una de las combinaciones no simétricas que son sucesiones bipartitas gráficas se verifica la propiedad P_3.

La prueba se completa siguiendo un argumento similar al del Teorema 1. □

ANEXO

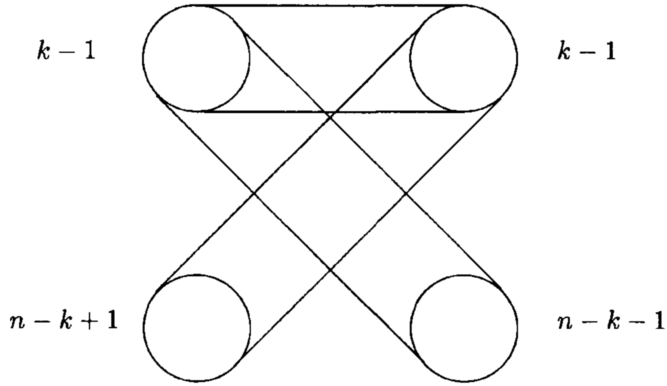


Figura 1. Ilustración del Lema.

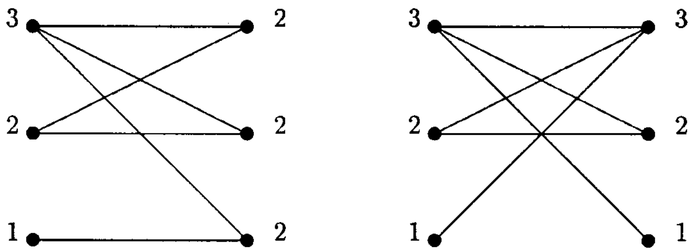
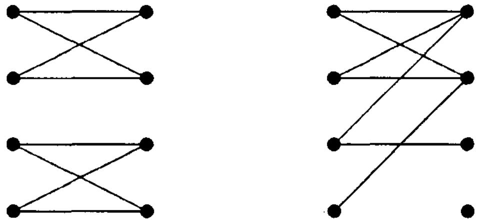
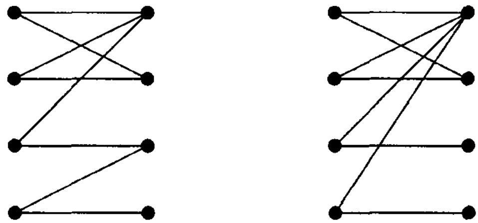


Figura 2. Realizaciones de Π que contienen a $K_{2,2}$.

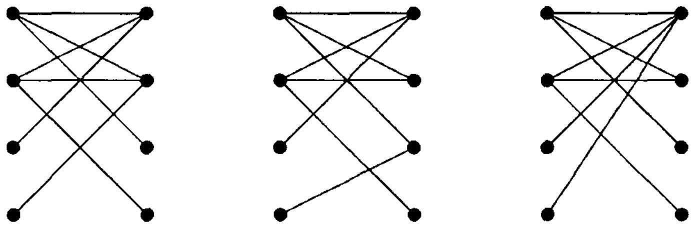


a) $\Pi_Y = (2,2,2,2)$ b) $\Pi_Y = (3,3,1,1)$



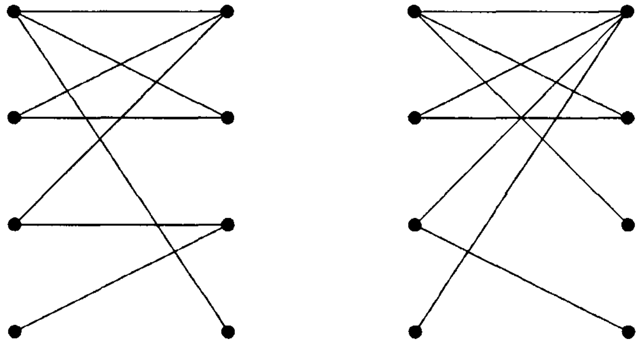
c) $\Pi_Y = (3,2,2,1)$ d) $\Pi_Y = (4,2,1,1)$

Figura 3. Realizaciones de Π con $\Pi_X = (2,2,2,2)$ que contienen a $K_{2,2}$.



a) $\Pi_Y = (3,3,1,1)$ b) $\Pi_Y = (3,2,2,1)$ c)$\Pi_Y = (4,2,1,1)$

Figura 4. Realizaciones de Π con $\Pi_X = (3,3,1,1)$ que contienen a $K_{2,2}$.



a) $\Pi_Y = (3, 2, 2, 1)$ b) $\Pi_Y = (4, 2, 1, 1)$

Figura 5. Realizaciones de Π con $\Pi_X = (3, 2, 2, 1)$ que contienen a $K_{2,2}$.

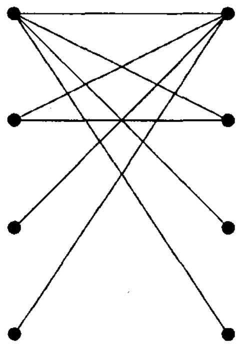


Figura 6. Realizaciones de Π con $\Pi_X = \Pi_Y = (4, 2, 1, 1)$ que contienen a $K_{2,2}$.

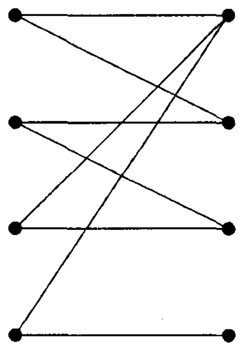


Figura 7. Ejemplo de una realización de $\Pi = (\Pi_X, \Pi_Y)$, con $\Pi_X = (2,2,2,2)$ y $\Pi_Y = (3,2,2,1)$, que no contiene a $K_{2,2}$.

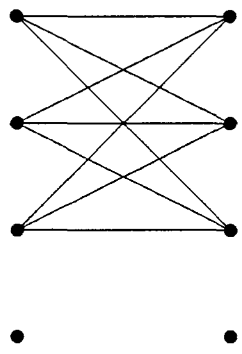
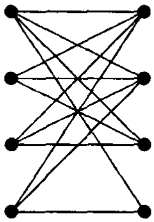
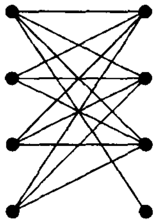


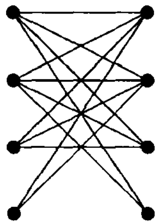
Figura 8. Ninguna realización de $\Pi_X = \Pi_Y = (4,3,3,3)$ puede contener a $K_{3,3}$.



a) $\Pi_X = (4,3,3,3)$ y
$\Pi_Y = (4,4,3,2)$



b) $\Pi_X = (4,3,3,3)$ y
$\Pi_Y = (4,4,4,1)$



c) $\Pi_X = \Pi_Y = (4,4,3,2)$

Figura 9. Combinaciones para Π con $n = 4$ y $k = 3$.

Referencias

[1] Erdös, P., Jacobson, M.S. y Lehel, J. (1991). *Graphs realizing the same degree sequences and their respective clique numbers"*. Graph Theory, Combinatorics & Applications. John Wiley & Sons, Inc., New York, pp 439 - 449.

[2] Li Jiong - Sheng and Song Zi - Xia .(1996). *An extremal problem on the potentially P_K-graphical sequences"*. The International Symposium on Combinatorics and Applications June 28 - 30, Tainjin, W. Y. C. Chen, D. Z. F. Hsu and H. P. Yap, Eds., Nankai University, pp. 269 - 276.

[3] Li Jiong - Sheng and Song Zi - Xia. (1998). *The Smallest Degree Sum That Yields Potentially PK-Graphical Sequences"*. Graph Theory, Combinatorics & Applications. John Wiley & Sons, Inc. New York, pp 63 - 72.

Daniel Brito, Gladys Lárez y Pedro Mago
Universidad de Oriente,
Departamento de Matemáticas,
Oriente, Venezuela.
dbrito@sucre.udo.edu.ve
glarez@sucre.udo.edu.ve