Pro Mathematica Vol. XV, Nos. 29-30

SOBRE LAS Ω-TRANSFORMACIONES EN UNA VARIEDAD CON CONEXIÓN AFÍN

Rodrigo ***Martínez*** *y Manuel* ***Salazar***

Resumen

El problema a estudiar está relacionado con la generalización de las equivalencias bajo Ω-transformaciones de conexiones afines sobre una variedad M.
Dos conexiones ∇ y $\overline{\nabla}$ son equivalentes bajo Ω-transformaciones, si para cada par de campos vectoriales (X, Y), se tiene:

$$\overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y = \Omega(X)Y \tag{1}$$

La generalización consistirá en estudiar (1) con combinaciones lineales de las Ω-transformaciones, establecer propiedades relacionadas con los conceptos de curvatura y torsión de cada conexión ∇ y $\overline{\nabla}$.

✏ *Universidad de Oriente y Universidad Experimental de Guayana, Venezuela.*

Se considerará en el lado derecho de la igualdad (1), el campo vectorial;

$$C(X,Y) = \alpha\Omega(X)Y + \beta\Omega(Y)X,$$

donde $\alpha, \beta \in C^{\infty}(M)$ y $\Omega \in \wedge(M)$.

Finalmente, se establece que en una variedad M sólo pueden existir dos conexiones (bajo la condición de que Ω es exacta): la de Lyra y la de Riemann.

1 Introducción

En [3] se muestra un método muy efectivo debido a Weyl, que permite plantear problemas de la mecánica, desde el punto de vista de la geometría diferencial.

En [2] y [1] se plantea y se resuelve un problema abierto de la mecánica, como lo es el problema del factor generatriz que convierte un sistema no holonómico, en uno holonómico para espacios de dimensión mayor que dos.

En el presente trabajo, se generalizan los resultados obtenidos en [3] y [2], introduciendo un campo vectorial más general, considerando las 1-formas exactas (y no cerradas como lo considera [3]) y usando el método de Weyl. Esto simplifica fuertemente los resultados obtenidos en [3], pues de los tres espacios estudiados allí bajo las Ω-transformaciones, solamente dos de ellos quedan estrechamente relacionados por cierta equivalencia.

2 Preliminares

En el presente trabajo se utilizarán las siguientes notaciones:

M - Variedad diferenciable de dimensión "n", con base local $\{x^1, \cdots, x^n\}$ en cada punto $p \in M$.

$C^{\infty}(M)$ - Anillo de las funciones infinitamente diferenciables sobre M.

$\chi(M)$ - Algebra de Lie de los campos vectoriales X, Y, etc, que son $C^{\infty}(M)$.

$T_p(M)$ - Espacio tangente en "p" a la variedad M con base local $\{\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}\}$.

$T_p^*(M)$ - Espacio cotangente de $T_p(M)$ con base local $\{dx^i\}$.

$\wedge^r(M)$ - Algebra de Grassman de las r-formas Ω que son $C^\infty(M)$.

$\tau(M)$ - Algebra de los campos tensoriales sobre M.

$V^i\ell_i = \sum_{i=1}^{n} V^i\ell_i$ - Suma de Einstein.

g - Tensor métrico en una variedad.

Las siguientes son definiciones y resultados que serán de utilidad en el desarrollo del trabajo.

Definición 1. *Sean $f \in C^\infty(M)$, $X, Y \in \chi(M)$, entonces se define el corchete de Lie, como el campo vectorial $[X,Y]$ dado por:*

$$[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf) \tag{2.1}$$

Definición 2. *Sean $f_i : M \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad i = \overline{1,n}$ y $\omega \in T_p^*(M)$, entonces $\omega = f_i dx^i$ es una 1-forma diferenciable si y sólo si cada $f_i \in C^\infty(M)$.*

Definición 3. *Para $r \geq 0$, se define la derivada exterior de la r-forma Ω mediante la aplicación*

$$\begin{aligned} d \quad : \quad & \wedge^r(M) \longrightarrow \wedge^{r+1}(M) \\ & \Omega \longrightarrow d\Omega, \end{aligned}$$

tal que,

(i) Si $r = 0$, entonces $\wedge^0(M) = \mathbb{R}$ y $df(X) = Xf \in C^\infty(M)$ para todo $f \in C^\infty(M)$, $X \in \chi(M)$.

(ii) Si $r = 1$, entonces para $\Omega \in \wedge^1(M)$, siendo $\Omega = f_i dx^i$, se sigue que

$$d\Omega = df_i \wedge dx^i \in \wedge^2(M)$$

(iii) $d^2 = 0$.

Definición 4. *Una 1-forma Ω <u>es exacta</u> si y sólo si existe $f \in C^{\infty}(M)$ tal que $\Omega = df$.*

<u>Observación</u>: De esta definición se deduce que:

$$\Omega = \Omega_i dx^i \quad \text{si y sólo si} \quad \partial_i \Omega_j = \partial_j \Omega_i,$$

es decir la 1-forma Ω <u>es localmente cerrada</u>.

Definición 5. *Una 1-forma Ω <u>es cerrada</u> si y sólo si $d\Omega = 0$.*

<u>Observación</u>: Toda 1-forma Ω exacta es cerrada; lo contrario no es cierto.

Definición 6. *Una conexión sobre una variedad M, es un operador,*

$$\begin{aligned} \nabla \quad : \quad & \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M) \\ & (X, Y) \longrightarrow \nabla_X Y, \end{aligned}$$

que asigna a cada par de campos vectoriales (X, Y), un campo vectorial $\nabla_X Y$, al cual se le denomina <u>derivada covariante</u> de Y en la dirección X, tal que para todo $X, Y, Z \in \chi(M)$ y $f \in C^{\infty}(M)$ satisface:

(i) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

(ii) $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$

(iii) $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$

(iv) $\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f \nabla_X Y$

Definición 7. *Sea Γ una forma bilineal tal que*

$$\begin{cases} \Gamma(X, Y) = \nabla_X Y - XY \\ \Gamma(\partial_i, \partial_j) = \Gamma^n_{ij}(p) - \partial_i \partial_j \end{cases} \tag{2.2}$$

tal forma se denomina <u>Conexión Afín</u>

<u>Observación</u>: De esta definición se deduce que existe una relación biunívoca entre Γ y ∇, por esto, en lo sucesivo, ∇ denotará una conexión afín. Al par (M, ∇) se le llama <u>variedad con conexión afín</u>.

Definición 8. *Si* $T_\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$ *es la aplicación que asigna a cada par de campos vectoriales* (X,Y)*, un campo vectorial* $T_\nabla(X,Y)$ *definido por:*

$$T_\nabla(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y], \tag{2.3}$$

entonces $T_\nabla(X,Y)$ *se denomina* *<u>torsión de la conexión</u>* ∇.

Definición 9. *Si* $R_\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$ *es la aplicación que asigna a cada tripleta de campos vectoriales* (X,Y,Z)*, un campo vectorial* $R_\nabla(X,Y)Z$ *definido por:*

$$R_\nabla(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, \tag{2.4}$$

entonces $R_\nabla(X,Y)Z$ *se denomina,* *<u>curvatura de la conexión</u>* ∇.

<u>Observación</u>: En [2] se muestra que entre los campos vectoriales $T_\nabla(X,Y)$ y $R_\nabla(X,Y)Z$, se tiene una "dependencia"relacionada con la identidad de Jacobi:

$$[X,[Y,Z]] + [Z,[X,Y]] + [Y,[Z,X]] = 0 \tag{2.5}$$

la cual se obtiene sustituyendo (2.3) en (2.5), resultando

$$\sigma\{R_\nabla(X,Y)Z + (\nabla_Z T_\nabla)(X,Y) + T_\nabla(Z;[Z,Y])\} = 0, \tag{2.6}$$

conocida como: <u>Primera identidad de Bianchi-Padova</u>, donde σ representa la suma cíclica para X, Y, Z.

Es importante señalar que en el estudio de la geometría de una variedad con conexión afín: $A_N = (M, \nabla)$, estos campos vectoriales juegan un papel fundamental.

Definición 10. *Dada una variedad con conexión afín* ∇*, entonces se define el* *<u>Tensor de Ricci</u>* *de la conexión* ∇*, mediante la traza de la aplicación lineal*

$$\mathcal{A} : \partial_k \longrightarrow R_\nabla(\partial_k, \partial_j)\partial_i = R^{\ell}_{\nabla kji}\partial_\ell,$$

que es $C^\infty(M)$*. De modo que*

$$Ricci(\partial_i, \partial_j) = traza(\mathcal{A}) = R^{k}_{\nabla kji} = R_{\nabla ji} \tag{2.7}$$

Definición 11. *Sea $A_n = (M, \nabla)$ tal que ∇ es la conexión determinada por el tensor métrico "g". Entonces se dice que ∇ es la conexión de Lyra si y sólo si satisface:*

$$\begin{cases} (\nabla_Z g)(X,Y) = 0 \\ T_\nabla(X,Y) = \Omega(X)Y - \Omega(Y)X, \end{cases} \tag{2.8}$$

para todo $X, Y, Z \in \chi(M)$ y $\Omega \in \Lambda^1(M)$.

La tripleta $\mu = (M, \nabla, g)$, define una Estructura de Lyra.

Teorema 1. *En las estructuras de Lyra $\mu = (M, \nabla, g)$ se tiene:*

$$\sigma\{R_\nabla(X,Y)Z + d\Omega(X,Y)Z\} = 0, \tag{2.9}$$

donde

$$d\Omega(X,Y)Z = X\Omega(Y) - Y\Omega(X) - \Omega([X,Y]) \tag{2.10}$$

La demostración se logra usando las relaciones (2.6), (2.4) y la torsión de Lyra.

Definición 12. *Sea $\overline{A}_n = (M, \overline{\nabla})$, tal que la conexión $\overline{\nabla}$ determinada por la métrica g satisface:*

$$\begin{cases} (\overline{\nabla}_Z g)(X,Y) = 0 \\ T_{\overline{\nabla}}(X,Y) = 0, \end{cases} \tag{2.11}$$

para todo $X, Y, Z \in \chi(M)$. Entonces se dice que $\overline{\nabla}$ es la conexión de Levi-Civita (o de Riemann). La tripleta $\overline{\mu} = (M, \overline{\nabla}, g)$, define una estructura de Riemann.

Observación: De la relación (2.6) se deduce que en las estructuras Riemannianas se cumple que

$$\sigma\{R_{\overline{\nabla}}(X,Y)Z\} = 0. \tag{2.12}$$

También, si en (2.8), la 1-forma Ω es exacta, entonces, por la observación de la definición 4, se concluye que la estructura resultante es Riemanniana.

Definición 13. *Sea $\tilde{A}_n = (M, \tilde{\nabla})$, tal que la conexión $\tilde{\nabla}$ determinada por g, satisface:*

$$\begin{cases} (\tilde{\nabla}_Z g)(X,Y) = 2\Omega(Z)g(X,Y) \\ T_{\tilde{\nabla}}(X,Y) = 0, \end{cases}$$

para todo $X, Y, Z \in \chi(M)$ y $\Omega \in \wedge^1(M)$. Entonces se dice que $\tilde{\nabla}$ es la conexión de Weyl. La tripleta $\tilde{\mu} = (M, \tilde{\nabla}, g)$, define una estructura de Weyl.

3 Resultados Obtenidos en [3]

En [3], se introducen los conceptos de "buena conexión"y de "conexión Ω-transformables"que permiten desarrollar un método sistemático y efectivo desarrollado por Weyl, con el cual se puede obtener una buena conexión $\overline{\nabla}$ a partir de una ∇ dada, entendiéndose por buena conexión:

(i) $(\overline{\nabla}_Z g)(X,Y) = 0$, para todo $X, Y, Z \in \chi(M)$

(ii) $\overline{\nabla}$ y ∇ preservan los tensores de curvatura y de Ricci.

(iii) $\overline{\nabla}$ y ∇ tienen el mismo paralelismo, es decir

$$\nabla_X X = \lambda_1 X \quad \text{y} \quad \overline{\nabla}_X X = \lambda_2 X,$$

donde λ_1 y λ_2 son curvas en la variedad M.

Surgen entonces las siguientes preguntas:

(a) ¿Existe tal conexión $\overline{\nabla}$, la cual satisface (i), (ii) y (iii)?

(b) Si existe, ¿cómo obtenerla?

Las respuestas a estas preguntas se resumen en los subsiguientes resultados.

Definición 14. *Las conexiones afines de los espacios $A_n = (M, \nabla)$ y $\overline{A}_n = (M, \overline{\nabla})$ son Ω-transformables si y sólo si*

$$\overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y = \Omega(X)Y, \tag{3.1}$$

para todo $X, Y \in \chi(M)$ y $\Omega \in \wedge'(M)$.

Teorema 2. *Si las conexiones afines de* $A_n = (M, \nabla)$ *y* $\overline{A_n} = (M, \overline{\nabla})$ *son* Ω*-transformables, entonces*

$$T_{\overline{\nabla}}(X,Y) = T_{\nabla}(X,Y) + \Omega(X)Y - \Omega(Y)X \tag{3.2}$$
$$(\nabla_X g)(Y,Z) = 2\Omega(X)g(Y,Z) \tag{3.3}$$

De este resultado se deduce inmediatamente que las conexiones afines de Lyra y de Riemann, son Ω-transformables.

Teorema 3. *Sea* A *un tensor covariante de tercer orden en* M*, tal que* $A(Z,X,Y) = A(Z,Y,X)$ *y sea* F *un tensor covariante de segundo orden en* M *tal que* $F(X,Y) = -F(Y,X)$*. Entonces existe una única conexión afín* ∇ *en* M *tal que*

$$(\nabla_X g)(Y,Z) = A(Z,X,Y) \tag{3.4}$$
$$T_{\nabla}(X,Y) = F(X,Y), \tag{3.5}$$

para todo $X, Y, Z \in \chi(M)$.

Teorema 4. *Bajo las* Ω*-transformaciones, los tensores de curvatura* $R^{\ell}_{\nabla_{ijk}}$ *y de Ricci* $R_{\nabla_{jk}}$*, son invariantes.*

Teorema 5. *Sean* ∇ *y* $\overline{\nabla}$ *conexiones afines en* M *tales que*

$$(\overline{\nabla}_Z g)(X,Y) = 0 \quad y \quad (\nabla_Z g)(X,Y) = \Omega(Z)g(X,Y) = A(Z,X,Y)$$

y supóngase que en la base local de $M : \{x^i\}$, $i = \overline{1,n}$,

$$\Omega = \Omega_i dx^i,$$

entonces

$$\Omega_i = \frac{1}{n}\left\{\overline{\Gamma}^j_{ji} - \Gamma^j_{ji}\right\},$$

donde $\overline{\Gamma}$ *y* Γ *son los coeficientes de las conexiones* $\overline{\nabla}$ *y* ∇ *respectivamente, determinadas por la métrica* g.

Teorema 6. *Si las conexiones* ∇ *y* $\overline{\nabla}$ *de los espacios con conexión afín* $A_n = (M, \nabla)$ *y* $\overline{\nabla}_n = (M.\overline{\nabla})$ *son* Ω*-transformables, entonces*

$$R_{\overline{\nabla}}(X,Y)Z = R_{\nabla}(X,Y)Z + d\Omega(X,Y)Z \tag{3.6}$$

<u>Observación</u>: Se preservará el tensor de curvatura y el tensor de Ricci si y sólo si Ω es cerrada.

4 Generalización de los Resultados Obtenidos en [3]

Se propone ahora, como resultados de este trabajo, la generalización de los teoremas enunciados anteriormente, con la previa introducción de la siguiente,

Definición 15. *Sean $A_n = (M, \nabla)$ y $\overline{A}_n = (M, \overline{\nabla})$ espacios con conexiones afines ∇ y $\overline{\nabla}$. Diremos que ∇ y $\overline{\nabla}$ son Ω-equivalentes si existe un campo vectorial*

$$C(X,Y) = \alpha\Omega(X)Y + \beta\Omega(Y)X \tag{4.1}$$

tal que

$$\overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y = C(X,Y), \tag{4.2}$$

donde $\alpha, \beta \in C^\infty(M)$.

Esta definición, produce inmediatamente otra donde se extiende la noción de Ω-equivalentes a los espacion A_n y $\overline{A}_n$.

Definición 16. *Sean $A_n = (M, \nabla)$ y $\overline{A}_n = (M, \overline{\nabla})$, espacios con conexiones afines ∇ y $\overline{\nabla}$, tales que:*

$$\begin{cases} (\nabla_Z\, g)(X,Y) = A(Z,X,Y) \\ T_\nabla(X,Y) = 0 \end{cases} \tag{4.3}$$

$$\begin{cases} (\overline{\nabla}_Z\, g)(X,Y) = 0 \\ T_{\overline{\nabla}}(X,Y) = C(X,Y). \end{cases} \tag{4.4}$$

Si existe $\Omega \in \Lambda'(M)$ tal que se cumpla (4.1), entonces diremos que A_n y $\overline{A}_n$ son Ω-equivalentes.

Teorema 7. *Sean $A_n = (M, \nabla)$ y $\overline{A}_n = (M, \overline{\nabla})$ Ω-equivalentes. Entonces*

$$T_{\overline{\nabla}}(X,Y) = T_\nabla(X,Y) + C(X,Y) - C(X,Y) \tag{4.5}$$

$$(\nabla_Z g)(X,Y) = 2\alpha\Omega(Z)g(X,Y) + \beta g(\Omega(X)Y + \Omega(Y)X, Z) \tag{4.6}$$

Como puede observarse, (4.5) y (4.6), generalizan las relaciones (3.2) y (3.3) del Teorema 2. Sólo basta poner $\alpha = 1$ y $\beta = 0$, en la relación (4.1) y (4.6).

Teorema 8. *Si $A_n = (M, \nabla)$ y $\overline{A}_n = (M, \overline{\nabla})$ son Ω-equivalentes, entonces en la base local de M se tendrá:*

$$\Omega_i = \frac{1}{n\alpha - \beta} \left\{ \overline{\Gamma}_i - \Gamma_i \right\}, \tag{4.7}$$

donde $\Gamma_i = \Gamma^j_{ji}$ y $\Omega = \Omega_i dX^i$.

De nuevo, haciendo $\alpha = 1$ y $\beta = 0$ en (4.7) se obtiene la generalización del Teorema 5.

Observación: El Teorema 8, asegura algo más que no se asegura en [3]: "Ω es una 1-forma global", pues se puede demostrar por la transformación de coordenadas $x^i \longrightarrow y^i$, con

$$y^i(x^1, \cdots, x^n) = y^i \qquad i = \overline{1, n}$$

y la transformación de coordenadas h_{sr} del tensor $g_{ij}(x)$ en el sistema $\{y^i\}$, dada por,

$$g_{ij} = \frac{\partial y^s}{\partial x^i} \frac{\partial y^r}{\partial x^j} h_{sr}$$

que

$$(\Omega_i)_x \, dx^i = (\Omega_i)_y \, dy^i.$$

Teorema 9. *Si los espacios $A_n = (M, \nabla)$ y $\overline{A}_n = (M, \overline{\nabla})$ son Ω-equivalentes, entonces los campos de curvatura en ambos espacios satisfacen:*

$$\begin{aligned} R_{\overline{\nabla}}(X,Y)Z &= R_{\nabla}(X,Y) + \alpha \, d\Omega(X,Y)Z + \\ &+ \beta\Omega^{-1}(Z)\{ \ [V,W] - \Omega(Z)^2[X,Y] - \Omega(\nabla_X Z)W + \\ &+ \ \Omega(\nabla_Y Z)V + T_{\nabla}(V,W) + \beta(\Omega(W)V - \Omega(V)W) \ \} \end{aligned} \tag{4.8}$$

donde $V = \Omega(Z)X$ y $W = \Omega(Z)Y$.

Observación: Si $\alpha = 1$ y $\beta = 0$, entonces de (4.8) se deduce la relación (3.6), es decir el Teorema 9 generaliza al Teorema 6. Más aún, si $\alpha = 0$

y $\beta = 1$, entonces de (4.8) se deduce que Ω es cerrada si y sólo si se preservan las curvaturas.

El siguiente resultado asegura que la invariancia del tensor curvatura en espacios Ω-equivalentes, se logra si la 1-forma Ω es localmente exacta y no cerrada, como se prueba en [3].

Teorema 10. *El tensor curvatura en espacios Ω-equivalentes es invariante si y sólo si Ω es localmente exacta, para $\beta \neq -n\alpha$.*

Demostración

De (4.8) se obtiene:

$$\begin{aligned} K(X,Y)Z &= \alpha\, d\Omega(X,Y)Z + \beta\{\ p(X,Z)Y - p(Y,Z)X + \\ &+ \ \Omega(Z)T_\nabla(X,Y)\ \}, \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} K(X,Y)Z &= R_{\overline{\nabla}}(X,Y)Z - R_\nabla(X,Y)Z \\ p(X,Y) &= (\nabla_X\Omega)(Y) - \beta\Omega(X)\Omega(Y) \end{aligned} \tag{4.9}$$

utilizando ahora los campos base $X = \partial_i$, $Y = \partial_j$ y $Z = \partial_k$, se tendrá que $K(X,Y)Z = 0$ si y sólo si

$$\alpha\{\partial_i\Omega_j - \partial_j\Omega_i\}\delta_k^\ell + \beta\left\{p_{ik}\delta_j^\ell - p_{jk}\delta_j^\ell + \Omega_k T^\ell_{\nabla_{ij}}\right\} = 0,$$

luego, usando (4.9), haciendo $\ell = k$ y sumando, se obtiene:

$$(n\alpha + \beta)\{\partial_i\Omega_j - \partial_j\Omega_i\} = 0.$$

Se concluye entonces por la Definición 4 y por hipótesis que Ω es localmente exacta.

5 Aplicaciones

PRIMERA: Sean $A_n = (M,\nabla)$ y $\overline{A}_n = (M,\overline{\nabla})$ los espacios de Weyl y de Riemann respectivamente; es decir

$$\begin{cases} (\nabla_Z\, g)(X,Y) = 2\Omega(Z)g(X,Y) \\ T_\nabla(X,Y) = \Omega(Y)X - \Omega(X)Y \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\overline{\nabla}_Z\, g)(X,Y) = 0 \\ T_{\overline{\nabla}}(X,Y) = 0. \end{cases}$$

En [3] se prueba que estos espacios son Ω-transformables si Ω es cerrada. Entonces probaremos que estos espacios son Ω-equivalentes, si Ω es exacta.

En efecto, sea $f : M \longrightarrow I\!R$, tal que,

$$f\, g_{kj} = G_{kj},$$

entonces

$$(\nabla_Z G)(X,Y) = g((Z(f) + 2\Omega(Z)f)X, Y),$$

ahora, para que $(\nabla_Z G)(X,Y) = 0$, es necesario y suficiente que:

$$\Omega(Z) = -\frac{1}{2f} Z(f),$$

que en coordenadas locales se expresa

$$\Omega_k = -\partial_k(\ln(f)),$$

de aquí se concluye que ∇ satisface:

$$\begin{cases} (\nabla_Z G)(X,Y) = 0 \\ T_\nabla(X,Y) = \Omega(Y)X - \Omega(X)Y; \end{cases}$$

es decir, ∇ es la conexión de Lyra y el espacio A_n se transforma en el espacio de Lyra bajo la condición, como hemos visto, de que Ω sea localmente exacta.

<u>SEGUNDA</u>: Sean $A_n = (M, \nabla)$ y $\overline{A}_n = (M, \overline{\nabla})$ los espacios de Lyra y de Weyl respectivamente; es decir:

$$\begin{cases} (\overline{\nabla}_Z g)(X,Y) = 0 \\ T_{\overline{\nabla}}(X,Y) = \Omega(X)Y - \Omega(Y)X \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\nabla_Z g)(X,Y) = 2\Omega(Z)g(X,Y) \\ T_\nabla(X,Y) = \Omega(Y)X - \Omega(X)Y. \end{cases}$$

y asumamos el mismo cambio, dado en la primera aplicación

$$\begin{cases} \Omega_k = -\partial_k(\ln f) \\ f\, g_{kj} = G_{kj}, \end{cases}$$

entonces se tiene que la conexión ∇ satisface:

$$\begin{cases} (\nabla_Z G)(X,Y) = 0 \\ T_\nabla(X,Y) = 0; \end{cases}$$

es decir, ∇ es la conexión de Riemann y el espacio A_n se transforma ahora en el espacio de Riemann, bajo la condición de que ∇ es localmente exacta.

De estas dos aplicaciones se desprende, sin ninguna duda, que si la 1-forma Ω es exacta, entonces se simplifica fuertemente los resultados de [3]. De allí que podemos, en base a todo esto, observar que en realidad en la variedad M sólo existirán dos conexiones: la de Lyra y la de Riemann.

Referencias

[1] Martínez, R. (1986). *"Aplicaciones Geodésicas en Espacios de Conexión Afín"*. Resumen XXXVI Convención Anual de AsoVAC, Valencia, pp. 159.

[2] Martínez , R., Ramírez, R. (1989). *"Geometrización de la Mecánica"*. Proccedings I Pan American Congress of Applied Mechanics (PACAM), Brasil, pp. 480-483.

[3] Shulin, L. (1983). *On the integrable character of connection"*. Inst. Math., Acad. Sinica **3** : (2).

Rodrigo Martínez
Universidad de Oriente, Venezuela
rodmarti48@hotmail.com

Manuel Salazar
Universidad Experimental de Guayana, Venezuela