Pro Mathematica Vol. XV, Nos. 29-30

CUANTIZACIÓN Y TEOREMA DE POINCARÉ-BIRKHOFF-WITT

Guillermo ***Cortiñas***

Resumen

En esta nota se exponen los principios básicos de la cuantización de álgebras de Poisson, con especial atención al caso del álgebra simétrica de un álgebra de Lie.

Departamento de Matemática, Universidad de Buenos Aires, Argentina.

1 Álgebras de Lie

En esta nota consideraremos álgebras y espacios vectoriales sobre un cuerpo fijo k, que supondremos de característica cero. Un *álgebra de Lie* es un espacio vectorial L junto con una operación binaria

$$[,] : L \times L \to L, \qquad (x, y) \mapsto [x, y]$$

k-bilineal, antisimétrica (es decir $[x, y] = -[y, x]$ para $x, y \in L$) y que satisface la llamada *identidad de Jacobi*

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]] \tag{1}$$

Observación 1.1. La identidad (1) debe interpretarse como una versión de la regla de Leibniz para la derivada de un producto. En efecto, si consideramos la aplicación

$$ad(x) : L \to L, \qquad y \mapsto [x, y]$$

entonces (1) se lee

$$ad(x)([y, z]) = [ad(x)(y), z] + [y, ad(x)(z)]$$

lo que nos dice que $ad(x)$ es una derivación con respecto a la operación $[,]$.

Ejemplo 1.2. Si A es un álgebra asociativa, definimos

$$[,] : A \times A \to A, \qquad [a, b] := ab - ba$$

Es claro que esta operación es k-bilineal y antisimétrica; una cuenta muestra que también se satisface (1), de modo que $(A, [,])$ es un álgebra de Lie. Se sigue que si $L \subset A$ es un subespacio tal que $[L, L] \subset L$ (pero no necesariamente $L \cdot L \subset L$) , entonces L es también un álgebra de Lie con la estructura inducida. Por ejemplo el álgebra asociativa de las matrices $n \times n$, $M_n(k)$ equipada con el corchete definido arriba es un álgebra de Lie (usualmente denotada $gl_n(k)$) y el subespacio de las matrices de traza nula

$$sl_n(k) = \{M \in gl_n(k) : Tr(M) = 0\}$$

es una subálgebra de Lie (aunque no una subálgebra para el producto asociativo de $M_n(k)$). Para ver esto basta notar que dadas $M,\ N \in gl_n(k)$,

$$Tr([M,N]) = Tr(MN) - Tr(NM) = 0$$

2 Álgebras Asociadas a un Álgebra de Lie

Sea L un álgebra de Lie. Por razones pedagógicas, asumiremos que L es de dimensión finita n. Si $x_1, \ldots, x_n$ es una base de L, llamamos *álgebra simétrica* de L al anillo de polinomios

$$SL := k[x_1, \ldots, x_n]$$

donde se entiende que $x_i x_j = x_j x_i$ para $1 \leq i, j \leq n$. Notemos que la definición no depende de la base elegida. En efecto, si $y_1, \ldots, y_n$ es otra base, entonces existe una matriz inversible $(a_{ij}) \in M_n(k)$ tal que

$$y_j = \sum_i a_{ij} x_i \qquad (1 \leq j \leq n)$$

Luego todo polinomio en las y_j es un polinomio en las x_i y viceversa.

También consideraremos el *álgebra tensorial* de L, definida como el álgebra de polinomios no conmutativa

$$TL := k\{x_1, \ldots, x_n\}$$

El mismo argumento que el utilizado arriba para el álgebra simétrica muestra que la definición es independiente de la elección de base.

Detengámonos un momento a comparar las álgebras SL y TL, es decir las álgebras de polinomios en variables conmutativas y no conmutativas. En ambos casos los polinomios de grado cero son las constantes, y las formas lineales (polinomios homogéneos de grado 1) son los elementos de L. Para $d \geq 2$ hay muchos más polinomios homogéneos no conmutativos de grado d que conmutativos. Por ejemplo las formas homogéneas de grado 2 son en cada caso

$$S^2L = \bigoplus_{i=1}^{n} kx_i^2 \oplus \bigoplus_{i<j} kx_i x_j \qquad T^2L = \bigoplus_{1 \leq i,j \leq n} kx_i x_j$$

Más generalmente digamos que los monomios ordenados

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$$

–donde si $i < j$, x_i sólo puede aparecer a la izquierda de x_j– forman una base de SL, mientras que para obtener una base de TL precisamos todos los monomios, ordenados o no.

Observemos que el corchete del álgebra de Lie no ha sido utilizado en la definición de las álgebras consideradas hasta el momento. Por otra parte en virtud de 1.2 tanto SL como TL pueden ser vistas como álgebras de Lie con corchete dado por $[f, g] = fg - gf$, que es idénticamente nulo en el caso de SL, no nulo en el caso de TL, y que en ningún caso está relacionado con el corchete de L. Esto nos motiva a considerar el álgebra envolvente universal de L, definida como el cociente

$$UL := TL/IL$$

donde IL es el ideal bilátero generado por los elementos de la forma

$$x_i x_j - x_j x_i - [x_i, x_j]$$

Aquí el $[,]$ es el corchete interno del álgebra L. De la bilinealidad tanto del producto asociativo de TL como del corchete de L, y del hecho de que $L = \sum_i kx_i$ se deduce que IL coincide con el ideal generado por los elementos de la forma

$$gh - hg - [g, h] \qquad (g, h \in L).$$

En particular, IL (y por tanto UL) es independiente de la base elegida.

Notemos que la composición $\iota : L \to TL \to UL$ es un morfismo de álgebras de Lie, es decir, es k-lineal y preserva corchetes. Por tanto su imagen es un subespacio de UL cerrado bajo corchetes. Más aún, se sigue del teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt (ver más abajo) que ι es inyectivo. Esto muestra que toda álgebra de Lie es isomorfa a una subálgebra de Lie de un álgebra asociativa (su envolvente universal), con lo que el ejemplo dado en 1.2 comprende de hecho a *todas* las álgebras de Lie.

3 Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt

Notemos que, si el corchete del álgebra de Lie L es idénticamente nulo, entonces UL y SL son álgebras isomorfas. Si en cambio $x, y \in L$ son tales que $[x, y] \neq 0$, entonces $xy - yx = [x, y] \neq 0$ en UL, con lo cual UL no es un álgebra conmutativa, y por tanto no puede ser isomorfa a SL. Sin embargo esto no implica que SL y UL no puedan ser isomorfos *como espacios vectoriales.* De hecho eso es lo que afirma el teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt (de ahora en más PBW). Concretamente, vale (cf. [6, LA 4.5]) que si $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es una base de L entonces el conjunto de todos los monomios

$$x^{\cdot\alpha} = x_1^{\cdot\alpha_1} \cdot \cdots \cdot x_n^{\cdot\alpha_n}$$

(donde productos y potencias se toman con respecto al producto $\cdot$ de UL) es una base de UL, y por tanto $x^\alpha \mapsto x^{\cdot\alpha}$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. La demostración de esta versión de PBW (más abajo enunciamos otra distinta) tiene dos partes, a saber: que los $x^{\cdot\alpha}$ forman un conjunto de generadores de UL, y que son l.i. Lo segundo es difícil de probar, pero no así lo primero. En efecto, como $UL = TL/IL$ y como –según se dijo en 1– los monomios no ordenados en los x_i forman una base de TL, se sigue que sus imágenes constituyen un conjunto de generadores de UL. Luego hay que demostrar que todo monomio desordenado se escribe como combinación lineal de monomios ordenados. Pero por definición de UL, se tiene

$$x_j x_i = x_i x_j + [x_i, x_j]$$

Por tanto si $i < j$ el monomio desordenado $x_j x_i$ se escribe como combinación lineal de uno ordenado de grado 2 y un elemento de L, es decir una combinación lineal de las variables, que son obviamente monomios ordenados. Hemos probado así que todo monomio ordenado de grado 2 se escribe como combinación lineal de uno ordenado del mismo grado y uno de grado menor. Con el mismo tipo de argumento se prueba por inducción en $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ que todo monomio $x^{\cdot\alpha}$ es combinación lineal de monomios ordenados de grado $\leq |\alpha|$.

Notemos que el isomorfismo $SL \cong UL$ que acabamos de discutir depende de la elección de la base $x_1, \ldots, x_n$ y más aún del orden en que estos elementos vienen dados . La versión de PBW que damos abajo rompe esa dependencia promediando todas las formas de ordenar un producto. Para una demostración del teorema 3.1, ver [5, Apéndice B 3].

Teorema 3.1. *Sean L un álgebra de Lie y $S = SL$, $T = TL$ y $U = UL$ respectivamente las álgebras simétrica, tensorial y envolvente universal. Para cada $r \geq 1$ denotamos por $\mathfrak{S}_r$ al grupo simétrico en r letras. Entonces la composición*

$$e : S \xrightarrow{s} T\,L \xrightarrow{\pi} U\,L$$

de la proyección canónica π con la aplicación definida por

$$s(l_1 \dots l_r) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}} l_{\sigma(1)} \cdots l_{\sigma(r)} \qquad (l_i \in L)$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

4 Cuantización

Definición 4.1. *En la situación del teorema 3.1, llamamos producto estrella al producto $S \times S \to S$ definido por*

$$f \star g = e^{-1}(e(f)e(g)) \qquad (f, g \in S)$$

Ejemplo 4.2. Calculemos $l_1 \star l_2$ para $l_1, l_2 \in L$. Debemos encontrar la imagen inversa de $e(l_1) \cdot e(l_2) = l_1 \cdot l_2$. La definición de e nos dice cómo hallar la imagen inversa de un monomio simétrico en los elementos de L. Basta entonces escribir a $l_1 \cdot l_2$ como combinación lineal de tales monomios:

$$\begin{aligned} l_1 \cdot l_2 &= \frac{1}{2}(l_1 \cdot l_2 + l_2 \cdot l_1) + \frac{1}{2}(l_1 \cdot l_2 - l_2 \cdot l_1) \\ &= e(l_1 l_2) + e(\frac{1}{2}[l_1, l_2]) \end{aligned}$$

Así

$$l_1 \star l_2 = l_1 l_2 + \frac{1}{2}[l_1, l_2]$$

Veamos algunas propiedades elementales del producto $\star$. La primera es que $(S, \star)$ es un álgebra asociativa isomorfa a UL. En efecto, e es un isomorfismo. La segunda (no tan inmediata) es que si f y g tienen grados p y q entonces $f \star g$ tiene grado $\leq p + q$. De esta segunda propiedad se sigue que si f y g son homogénenos de grados r y s, entonces

$$f \star g = \Phi_0(f, g) + \Phi_1(f, g) + \cdots + \Phi_{r+s}(f, g) \tag{2}$$

donde $\Phi_p(f, g)$ es un polinomio homogéneo de grado $r+s-p$. Extendiendo por linealidad se obtiene para cada $p \geq 0$ una aplicación

$$\Phi_p : S \times S \to S$$

tal que (2) vale para todo $f, g \in S$ con $gr(f) = r$, $gr(g) = s$ y tal que $gr(\Phi_p(f, g)) \leq gr(f) + gr(g) - p$. Más aún, dado que $\Phi_p(f, g) = 0$ para $p > gr(f) + gr(g)$ podemos escribir

$$f \star g = \sum_{p=0}^{\infty} \Phi_p(f, g) \tag{3}$$

Por ejemplo según vimos en la definición 4.1,

$$\Phi_0(l_1, l_2) = l_1 l_2, \quad \Phi_1(l_1, l_2) = \frac{1}{2}[l_1, l_2]$$

En general se tiene

$$\Phi_0(f, g) = fg \qquad (f, g \in S) \tag{4}$$

No probaremos esta identidad; sin embargo más abajo damos una idea de cómo hallar fórmulas para todos los Φ_p, que puede aplicarse para obtener una demostración de (4).

Una consecuencia importante de las propiedades (3) y (4) es que el producto $\star$ puede verse como una *deformación* o *cuantización* del producto conmutativo usual de S. En efecto se prueba que para cada $t \in k$ la serie

$$f \star_t g = \sum_{p=0}^{\infty} \Phi_p(f, g) t^p \tag{5}$$

da un producto asociativo. Tenemos así una familia de productos asociativos parametrizada por t que para $t = 0$ da Φ_0, que según (4) es el producto usual de polinomios, y para $t = 1$ da el producto $\star$. Es en este sentido que $\star_1$ es una deformación de $\star_0$.

Los físicos utilizan el término cuantización pues ven en la teoría de deformaciones un modelo matemático donde poner juntas a la física clásica (modelada por el cálculo conmutativo usual) y la física cuántica (que introduce la no conmutatividad). Para más precisiones, ver [1].

El término Φ_1 también tiene una expresión sencilla

$$\Phi_1(f,g) = \frac{1}{2}\sum_{i<j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)[x_i, x_j] \tag{6}$$

Escribamos

$$\{f,g\} := 2\Phi_1(f,g) \tag{7}$$

Es un ejercicio sencillo verificar que la operación $\{,\} : S \times S \to S$ es k-bilineal y tiene además las siguientes propiedades

$$\begin{aligned}
\text{Antisimetría} &: \{g,f\} = -\{f,g\} \\
\text{Identidad de Leibniz} &: \{fg,h\} = g\{f,h\} + f\{g,h\} \\
\text{Identidad de Jacobi} &: \{f,\{g,h\}\} = \{\{f,g\},h\} + \{g,\{f,h\}\}
\end{aligned}$$

En general si A es un álgebra conmutativa y $\{,\} : A \times A \to A$ es k-bilineal y verifica las condiciones anteriores, decimos que $\{,\}$ es un *corchete de Poisson*, y llamamos *álgebra de Poisson* al álgebra conmutativa A equipada con el corchete $\{,\}$. En otras palabras un álgebra de Poisson es un espacio vectorial A con dos operaciones $\cdot$ y $\{,\}$, de modo que $(A,\cdot)$ es un álgebra conmutativa, $(A,\{,\})$ es un álgebra de Lie, y $\{,\}$ satisface la regla de Leibniz con respecto a $\cdot$. *Cuantizar* un álgebra de Poisson es –por definición– encontrar para todo p un operador $\Phi_p : A \times A \to A$ de modo tal que la serie formal (5) de un producto asociativo, y que

$$\Phi_0(f,g) = f \cdot g \quad \text{y} \quad \Phi_1 = \frac{1}{2}\{f,g\}$$

Un celebrado teorema de M. Kontsevich [4] establece que *todo corchete de Poisson en un anillo de polinomios se puede cuantizar.*

Ejemplo 4.3. Si L y S son como arriba, entonces tanto Φ_1 como (7) son corchetes de Poisson en S. En general si $c_{ij} \in k[x_1, \ldots, x_n]$ $(1 \leq i, j \leq n)$ son polinomios tales que $c_{ij} = -c_{ji}$ entonces

$$\{f, g\} := \sum_{i<j} (\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}) c_{ij} \tag{8}$$

es k-bilineal, antisimétrico, satisface Leibniz y $\{x_i, x_j\} = c_{ij}$. (De hecho es la única operación binaria que satisface tales requisitos). Sin embargo (8) no tiene por qué satisfacer Jacobi. Se puede ver que (8) satisface Jacobi si y sólo si

$$\{x_i, c_{jk}\} = \{c_{ij}, x_k\} + \{x_j, c_{ik}\} \qquad (1 \leq i, j, k \leq n)$$

Por ejemplo si $c_{ij} \in k$ para todo i, j entonces los tres términos son nulos, y en particular vale Jacobi.

5 Fórmulas para el Producto $\star$

El propósito de esta sección es dar una idea de cómo calcular el producto $\star$ definido en (2) para el álgebra simétrica de un álgebra de Lie, es decir dar fórmulas para los operadores Φ_p. Luego veremos cómo aplicar ésto para cuantizar de cualquier corchete de Poisson en $k[x_1, \ldots, x_n]$ con coeficientes c_{ij} constantes (notación del ejemplo 4.3).

Para calcular el producto (2) se utiliza el teorema de Campbell-Hausdorff-Baker ([6, LA 7.4]), que explicamos a continuación. Consideremos la serie formal

$$\exp(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^p}{p!}$$

El teorema CHB da una fórmula para el producto de las exponenciales de dos elementos x, y de un anillo R *que no necesariamente conmutan* y que tiene validez toda vez que las series $\exp(x)$ y $\exp(y)$ tienen sentido, como por ejemplo si x, y son variables no conmutativas y $R = k\{\{x, y\}\}$ es el anillo de series formales. Concretamente el teorema dice que

$$\exp(x) \exp(y) = \exp(z(x, y))$$

donde $z = z(x, y)$ es una serie

$$z = \sum_{p=1}^{\infty} z_p$$

y da fórmulas explícitas (cf. [6, LA p. 29]) para los z_p. Por ejemplo

$$z_1 = x + y, \quad z_2 = \frac{1}{2}[x, y] \quad z_3 = \frac{1}{12}([x[x, y]] + [y, [y, x]])$$

En general, para $V = kx \oplus ky$ se tiene

$$z_p \in [V, [V, [\ldots [V, V] \ldots]]] \qquad (p - 1 \text{ corchetes} = p \text{ letras V})$$

Aquí $L_p := [V, [V, [\ldots [V, V] \ldots]]]$ es el espacio vectorial generado por los corchetes de elementos de V. Por ejemplo si x e y conmutan, se tiene $L_p = 0$ (y por tanto $z_p = 0$) para $p \geq 2$ y se recobra la fórmula usual.

Veamos ahora la relación entre CHB y el producto estrella. Sean S, L, U y $e : S \to L$ como en el teorema PBW, y sean $g_1, \ldots, g_r \in L$, y $t_1, \ldots, t_r$ indeterminadas conmutativas independientes. Ponemos

$$x(t) = \sum_{i=1}^{r} g_i t_i$$

Notemos que $x(t)$ es un elemento del anillo de polinomios $U[t_1, \ldots, t_r]$ sin término constante. Por tanto $\exp(x(t))$ es un elemento del anillo de series formales $U[[t_1, \ldots, t_r]]$. Se tiene

$$e(g_1 \ldots g_r) = \text{ coeficiente de } t_1 \ldots t_r \text{ en } \exp(x(t))$$

Verifiquemos esto. Por definición

$$\exp(x(t)) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!}(x_1 t_1 + \cdots + x_r t_r)^p$$

Ahora bien, $(x_1 t_1 + \cdots + x_r t_r)^p$ es un polinomio homogéneo de grado p en $t_1, \ldots, t_r$. Por tanto el coeficiente de $t_1 \ldots t_r$ de $\exp(x(t))$ es el coeficiente de $t_1 \ldots t_r$ de

$$(1/r!)x(t)^r = \frac{1}{r!}(x_1 t_1 + \cdots + x_r t_r)(x_1 t_1 + \cdots + x_r t_r) \ldots (x_1 t_1 + \cdots + x_r t_r)$$

Cuando desarrollamos este producto utilizando la ley distributiva debemos elegir un término en cada paréntesis. Para obtener un múltiplo de $t_1 \dots t_r$ los términos elegidos en los r paréntesis deben ser todos distintos. Se sigue que el coeficiente buscado es

$$\frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} g_{\sigma(1)} \dots g_{\sigma(r)} = e(g_1 \dots g_r)$$

Veamos ahora cómo utilizar la fórmula CBH. Supongamos que, además de los g_i tenemos ahora unos elementos $h_1, \dots, h_s \in L$ y queremos calcular $g_1 \dots g_r \star h_1 \dots h_s$. Consideramos variables conmutativas $u_1, \dots, u_s$ (independientes entre sí y de las t_i) y formamos las series exponenciales de $x(t)$ y de $y(u) = h_1 u_1 + \cdots + h_s u_s$, que son elementos de $U[[t_1, \dots, t_r, u_1, \dots, u_s]]$. Entonces

$$\begin{aligned} g_1 \dots g_r \star h_1 \dots h_s &= e^{-1} \, (\text{coef. de}\, t_1 \dots t_r u_1 \dots u_s \text{ en } \exp(x(t)) \\ &\quad \exp(y(u))) \\ &= e^{-1} \, (\text{coef. de}\, t_1 \dots t_r u_1 \dots u_s \, \text{en } \exp(z(t,u))) \end{aligned}$$

donde $z(t,u) = z(x(t), y(u))$ es la serie CHB. Por ejemplo utilizando este método no es difícil (aunque requiere una cuenta) probar que Φ_0 coincide con el producto conmutativo usual de S. Tampoco es difícil ver que

$$\Phi_1(g_1 \dots g_r, h_1 \dots h_s) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} g_1 \dots \overset{i}{\vee} \dots g_r h_1 \dots \overset{j}{\vee} \dots h_s [g_i, h_j] \tag{9}$$

La demostración de (6) se completa notando que el lado derecho de (6) también satisface (9). En general se tiene

$$\Phi_p(g_1 \dots g_r, h_1 \dots h_s) = \sum_i z_{i,1} \dots z_{i,r+s-p}$$

donde z_{ij} es una expresión que involucra corchetes iterados de los g_l y h_k. En [3] se da una fórmula general para los z_{ij} y se demuestra de que Φ_p es un *operador bidiferencial* de orden $\leq p$ en cada variable. En términos de $x_1, \dots, x_n$ esto significa que Φ_p viene dado por una expresión que involucra combinaciones S-lineales de derivadas parciales de orden $\leq p$ con respecto a las x_i aplicadas a f y g. (Existe también una definición intrínseca de operador diferencial, cf. [3,(21)]).

Ejemplo Si $[L,[L,L]]=0$ (es decir si $[g,[h,l]]=0$ para todo $g,h,l\in L$) se puede ver que

$$\Phi_p(g_1\dots g_r,h_1\dots h_s)=$$
$$\frac{1}{2^p}\sum_{i_1<\cdots<i_p,j_1<\cdots<j_s} g_1\dots\overset{i_1}{\vee}\dots\overset{i_p}{\vee}\dots g_rh_1\dots\overset{j_1}{\vee}\dots\overset{j_p}{\vee}\dots h_s[g_{i_1},h_{j_1}]\dots[g_{i_p},h_{j_p}]$$

En términos de una base $x_1,\dots,x_n$ de L esto da

$$\Phi_p(f,g)=\frac{1}{2^p}\sum_{i_1,\dots,i_p,j_1,\dots,j_p}\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_p}}\frac{\partial^p g}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_p}}[x_{i_1},x_{j_1}]\dots[x_{i_p},x_{j_p}] \tag{10}$$

Aplicación a corchetes de Poisson con coeficientes constantes

Si $\{,\}$ es un corchete de Poisson cualquiera en $k[x_1,\dots,x_n]$, con $[x_i,x_j]=c_{ij}$ también podemos considerar el operador bidiferencial

$$\Phi_p(f,g)=\frac{1}{p!}\sum_{i_1,\dots,i_p,j_1,\dots,j_p}\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_p}}\frac{\partial^p g}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_p}}c_{i_1j_1}\dots c_{i_p,j_p} \tag{11}$$

que se obtiene de (10) reemplazando $[x_i,x_j]$ por $c_{i,j}$. Sin embargo el producto $\star=\sum_p\Phi_pt^p$ no resulta asociativo en general. Un caso en que sí es asociativo (y por tanto da una cuantización) es cuando $c_{ij}\in k$ para todo i,j. La fórmula (11) se conoce como fórmula de Moyal (cf. [2, 20]).

Referencias

[1] Bayen, F., Flato, M., Fronsdal,C., Lichnerowicz, A., Sternheimer, D. (1978). *Deformation theory and quantization II"*. Annals of Physics 111, pp. 111-151.

[2] Cannas da Silva,A., Weinstein,A. *Geometric models for noncommutative algebras"*. Amer. Math. Soc. Berkeley Mathematics Lecture Notes 10.

[3] Cortiñas, G. *An explicit formula for PBW quantization"*. http://www.lanl.gov/abs/math.QA/0001127 (A aparecer en Comm. in Alg).

[4] Kontsevich, M. *Deformation quantization of Poisson manifolds I"*. http://www.lanl.gov/abs/math.QA/9709040

[5] Quillen, D. (1969). *Rational homotopy"*. Ann. of Math. 90(2), pp. 205-298.

[6] Serre, J.P. *Lie algebras and Lie groups"*. Springer Lecture Notes in Math. 1500.

Guillermo Cortiñas
Departamento de Matemática
Facultad de Cs. Exactas y Naturales
Ciudad Universitaria Pabellón 1, (1428)
Universidad de Buenos Aires, Argentina
gcorti@dm.uba.ar