Pro Mathematica Vol. XV, Nos. 29-30

TEORÍAS HOMOLÓGICAS Y ESCISIÓN

Christian ***Valqui***

Resumen

Veremos algunos aspectos de topología algebraica, en particular ilustraremos la clasificación de superficies bidimensionales compactas.

Sección Matemáticas, Departamento de Ciencias, PUCP.

1 ¿Cuántos tipos de globos hay?

El contenido de este artículo es una charla dada en el VIII coloquio de la Sociedad Boliviana de Matemáticas, el martes 27 de noviembre del 2001. Nace del deseo de explicar a un público no especializado el tema de mi tesis de doctorado que es sobre homología cíclica y escisión. Vamos a dar un vistazo al área en el que se encuentra dicho tema, que es la topología algebraica, y veremos un poco sobre escisión.

Empecemos con un resultado clásico de la topología algebraica: La clasificación de las superficies bidimensionales compactas orientadas.

¿Cuántos tipos de globos hay? Si preguntamos esto a un fabricante de globos nos dirá: "Hay 134; rojos, azules, verdes, amarillos, lilas, etc."

Le decimos: "No nos interesa el color, solo la forma."

"Ah, hay culebra, pera, forma de pelota, etc."

Pero a nosotros sólo nos interesa la forma del globo módulo deformación. Es decir, dos globos son del mismo tipo, si se puede deformar uno en el otro. Como la culebra se puede deformar en la pera y ésta a su vez en la esfera, estos tres globos son del mismo tipo (topológico).

Entonces repetimos la pregunta: ¿Cuántos tipos de globos hay? ¿Uno, no más?

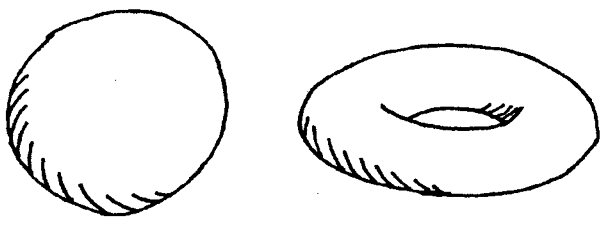

Figura 1.1 *La esfera no se deforma en el toro*

En la figura vemos dos tipos de globos distintos: La esfera no se puede deformar en la cámara de llanta, por lo tanto se trata de dos tipos distintos de globos.

En la siguiente figura vemos dos tipos más de globos: el bitoro y el tritoro.

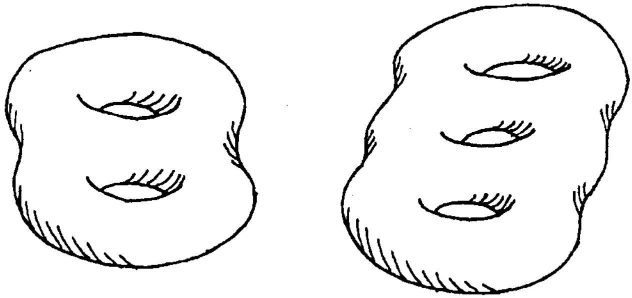

Figura 1.2 *El bitoro y el tritoro son otros dos tipos de globos*

Nos damos cuenta entonces que hay infinitos tipos de globos, con 0 huecos (esfera), con un hueco (toro), con dos huecos (bitoro), con tres huecos (tritoro), etc. Vemos que hay una biyección entre $\mathbb{N}$ y los tipos de globos; a cada globo le asignamos el número de huecos, que es invariante por deformación. Veamos otros globos:

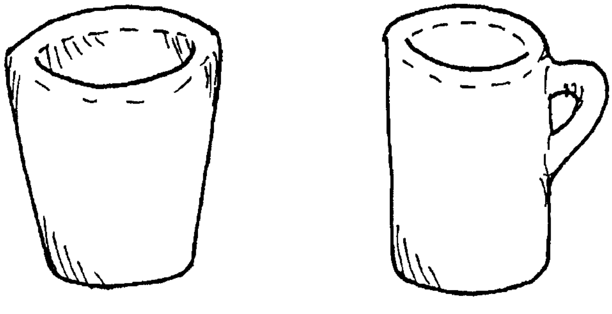

Figura 1.3 *También estos globos son clasificables*

El vaso no tiene hueco, por lo tanto es del tipo de la esfera. La taza tiene un hueco, es del tipo del toro.

Sigamos con los ejemplos

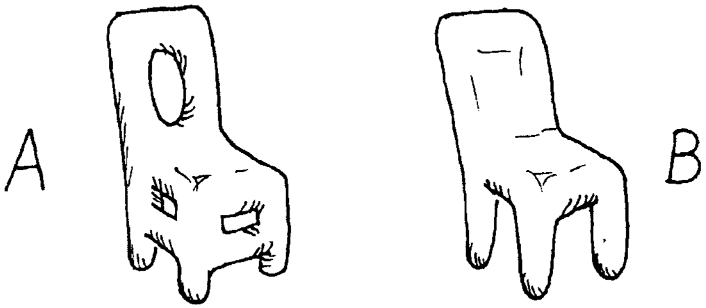

Figura 1.4 *Dos tipos de silla*

Aquí la correspondencia nos da:

$$\begin{array}{lcl} \text{Silla A} & \mapsto & 5 \\ \text{Silla B} & \mapsto & 0 \end{array}$$

Esta correspondencia que asigna a cada globo el número de huecos se llama invariante – porque es invariante bajo deformaciones, por ejemplo la taza se puede deformar en el toro y la invariante no cambia. Es una invariante bastante simple, en la siguiente sección veremos otra invariante.

2 El número de singularidades de una superficie

La pregunta de partida ahora es: ¿Dada una superficie peluda bidimensional orientada compacta (globo), se puede peinar?. La respuesta del peluquero ya la conocemos: "Todo se puede peinar."

Mejoramos la pregunta: ¿Se puede peinar sin que haya remolinos (Singularidades)?

Esfera	:	No (Teorema de la no peinabilidad del erizo).
Toro	:	Si
Bitoro	:	No
Tritoro	:	No

La pregunta que realmente nos interesa es la siguiente: ¿Cuál es el obstáculo que nos impide peinar ciertas superficies? Encontramos que en el caso de la esfera son dos singularidades simples (todos los pelos salen o todos los pelos entran a la singularidad). En el caso del toro no hay obstrucción.

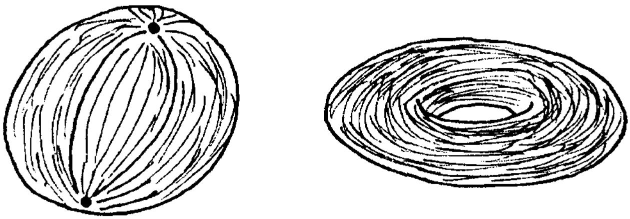

Figura 2.1 *Obstrucción a la peinabilidad de la esfera y del toro.*

Para el bitoro encontramos dos singularidades de tipo ensilladura (Notar que solamente se ve la singularidad de la parte delantera de la figura).

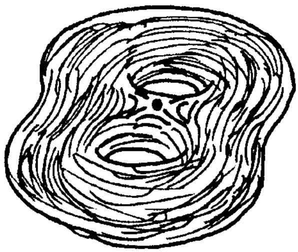

Figura 2.2 *Obstrucción a la peinabilidad del bitoro*

y en el caso del tritoro hay 4 de esas singularidades

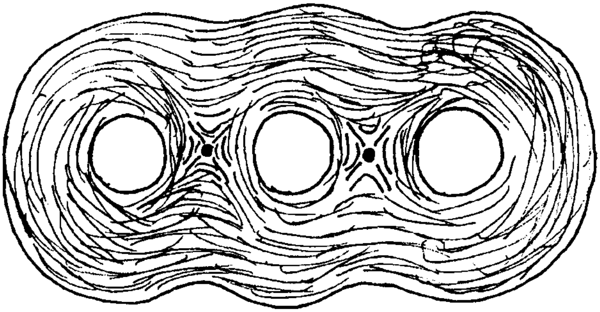

Figura 2.3 *Obstrucción a la peinabilidad del tritoro.*

Bitoro	:	2 singularidades tipo ensilladura.
Tritoro	:	4 singularidades tipo ensilladura.

Es obvio que si una superficie se puede deformar en otra, el peinado se puede trasladar con la deformación, de modo que se puede obtener el mismo número de singularidades para dos superficies del mismo tipo. Si contamos las singularidades simples (ss) con +1 y las de tipo ensilladura (se) con -1, el número así obtenido no depende de la forma en que hemos peinado la superficie, es decir, es invariante por deformación. Veamoslo en un ejemplo: Tomemos el método estándar de peinar una superficie "Dejar caer la miel". Nos podemos imaginar que dejamos caer miel desde el punto más alto de la superficie y perseguimos las trayectorias de las partículas de miel. Siempre que el plano tangente a la superficie sea horizontal, tenemos una singularidad.

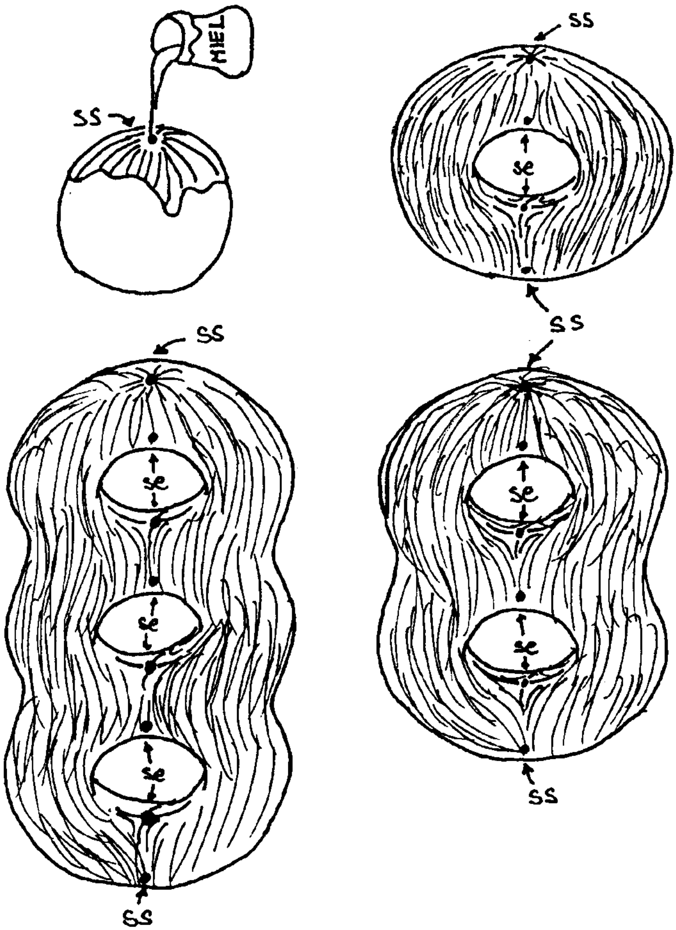

Figura 2.4 *Dejar caer la miel.*

Si contamos las singularidades con signo, obtenemos (ss= singularidad simple, se= singularidad de tipo ensilladura):

Esfera	:	2 ss			$= +2$
Toro	:	2 ss	$+$ 2 se	$= +2 - 2$	$= 0$
Bitoro	:	2 ss	$+$ 4 se	$= +2 - 4$	$= -2$
Tritoro	:	2 ss	$+$ 6 se	$= +2 - 6$	$= -4$

Lo cual coincide con el número de singularidades (con signos) del peinado anterior.

3 Homología

Hemos visto 2 distintas invariantes, una le asigna a cada superficie el número de huecos y la otra el número de singularidades con signos. Esta última invariante se puede extender a superficies de dimensión cualquiera, lo cual no se puede hacer con la primera. En general se puede definir teorías homológicas en espacios topológicos, no solamente en superficies. Estas teorías asignan a cada espacio topológico un objeto algebraico; vamos a ver el caso de que este sea un espacio vectorial complejo $\mathbb{Z}$-graduado. Es decir

$$X \mapsto HX = \{H_n(X)\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

que se puede ver como

$$HX = \cdots \oplus H_{-2}(X) \oplus H_{-1}(X) \oplus H_0(X) \oplus H_1(X) \oplus H_2(X) \oplus \cdots .$$

Las teorías homológicas cumplen con las siguientes propiedades.

1. Invarianza por homotopías. Esto equivale a invarianza por deformación en el caso de los globos. Si X, Y son espacios topológicos, se dice que son homotópicamente equivalentes, si se puede deformar uno en el otro y se escribe: $X \simeq Y$. Se cumple:

$$X \simeq Y \Rightarrow H_n(X) \cong H_n(Y) \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$$

2. Valor en un punto: Para las teorías homológicas que consideramos

la homología del punto es

$$H_n(\{p\}) = \begin{cases} 0 & \text{Si} \quad n \neq 0 \\ \mathbb{C} & \text{Si} \quad n = 0 \end{cases}$$

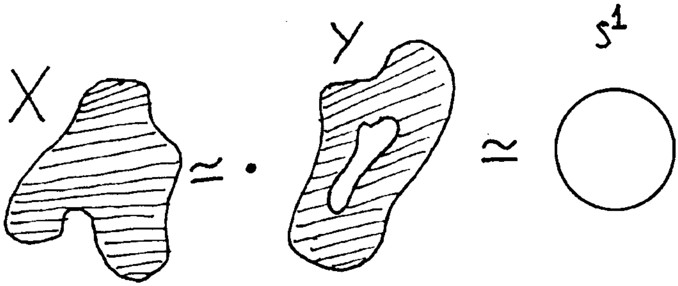

Figura 3.1 $X \simeq \{p\}, \quad Y \simeq S^1$

Ejemplo: Si $X \simeq \{p\}, \quad Y \simeq S^1$ como en la figura, entonces podemos calcular la homología de X: es igual a la del punto:

$$H_n(X) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq 0 \\ \mathbb{C} & \text{si} \quad n = 0 \end{cases}$$

Para calcular la homología de Y, necesitamos herramientas más poderosas.

3. Si X es la unión disjunta de dos espacios topológicos $X = X_1 \uplus X_2$, entonces la homología de la unión es la suma directa de la homología de X_1 y X_2. (En realidad esto vale para cualquier unión disjunta de espacios topológicos, ni siquiera tiene que ser enumerable).

4. Secuencia de Mayer-Vietoris: Si un espacio M es unión de dos otros, $M = U \cup V$, su homología se puede determinar usando la homología de U, de V y de la intersección $U \cap V$.

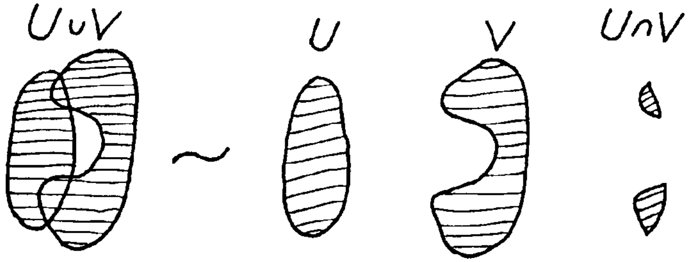

Figura 3.2 *La secuencia de Mayer Vietoris relaciona $H(M)$ con $H(U), H(V)$ y $H(U \cap V)$*

4 Propiedades de la homología

La motivación principal de la topología algebraica se puede resumir en la siguiente afirmación: El álgebra es más fácil que la topología. Por ejemplo se pueden sumar números, elementos de un anillo, mas no objetos topológicos. Con el álgebra es posible hacer cálculos.

Entonces la estrategia es la siguiente:

Se reemplaza el espacio topológico por un álgebra y calculamos luego la homología del álgebra. Será el álgebra de las funciones continuas sobre el espacio topológico. Recordemos que un álgebra (compleja) es un espacio vectorial (complejo) provisto de una operación interna, la multiplicación, que en nuestro caso es la multiplicación puntual de las funciones. Presentamos un pequeño diccionario:

Espacio topológico	$\rightarrow$	Álgebra
X	$\rightarrow$	C(X), funciones continuas de X a $\mathbb{C}$
$f : X \rightarrow Y$continua	$\leftrightarrow$	$f^* : C(Y) \rightarrow C(X)$, homomorfismo de álgebras
{p}	$\rightarrow$	$\mathbb{C}$
$X \simeq Y$	$\rightarrow$	$C(X) \simeq C(Y)$
$X \simeq \{p\}$	$\rightarrow$	$C(X) \simeq \mathbb{C}$
Secuencia de MV	$\rightarrow$	escisión

Observemos:

Las funciones de un punto hacia $\mathbb{C}$ se pueden identificar con el valor en el punto, es decir con los elementos de $\mathbb{C}$.

La equivalencia homotópica de espacios topológicos la habíamos visto como deformación de uno en el otro, pero tiene una definición exacta que es la siguiente:

$f, g : X \rightarrow Y$ son homotópicas si existe una familia continua de funciones $h_t : X \rightarrow Y$ continuas para $t \in [0,1]$ de modo que $h_0 = f$ y $h_1 = g$. Se dice que X e Y son homotópicamente equivalentes si existen funciones $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow X$ que son inversos salvo homotopía, es decir, $f \circ g \simeq Id_X$ y $g \circ f \simeq Id_Y$.

Esta definición se puede adaptar al caso de álgebras:

$f, g : A \rightarrow B$ son homotópicas si existe una familia continua h_t de homomorfismos de álgebras de A a B para $t \in [0,1]$ de modo que $h_0 = f$ y $h_1 = g$. Se dice que A y B son homotópicamente equivalentes si existen funciones $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow A$ que son inversos salvo homotopía, es decir, $f \circ g \simeq Id_A$ y $g \circ f \simeq Id_B$.

Para poder explicar lo que es escisión tenemos que definir previamente lo que es una extensión.

Definición 4.1. *Una extensión de álgebras es una sucesión exacta corta:*

$$0 \rightarrow I \rightarrow A \xrightarrow{\pi} A/I \rightarrow 0$$

donde π es sobreyectivo e I es el núcleo de π contenido en A, por lo tanto es un ideal ($f \in I, g \in A \Rightarrow fg \in I$).

Ejemplo: Sea $A = C(X)$, Y un subespacio cerrado de X, e

$$I := \{f : X \to \mathbb{C} \mid f(y) = 0 \; \forall \; y \in Y\}$$

Entonces I es el núcleo de la aplicación de $C(X)$ a $C(Y)$ que se define tomando la restricción de una función en X al subespacio Y.

4.1 Teorema de escisión para HP

La homología cíclica periódica bivariante está definida para $C^\infty(M)$ donde M es una variedad diferenciable, sólo tiene términos para $n = 0$ y $n = 1$.

Definición 4.2. *Una extensión* $0 \to I \to A \to A/I \to 0$ *se dice que cumple escisión para HP, si existe una sucesión exacta de 6 términos:*

$$\begin{tikzcd} HP_0(I) \arrow[r] & HP_0(A) \arrow[r] & HP_0(A/I) \arrow[d] \\ HP_1(A/I) \arrow[u] & HP_1(A) \arrow[l, phantom, ""] \arrow[r] & HP_1(I) \end{tikzcd}$$

En 1993 Cuntz y Quillen demostraron que toda extensión cumple escisión, usando un herramientas matemáticas muy sofisticadas.

Vamos a ver como se usa este resultado de escisión en un ejemplo, calculando la homología cíclica periodica del álgebra de funciones sobre el círculo unitario S^1.

Ejemplo: Sea $A = C^\infty(S^1), X = S^1, Y = \{1\}$. Tenemos la extensión

$$\begin{array}{rcl} 0 \to \mathcal{S} \to C^\infty(S^1) & \to & \mathbb{C} \to 0 \\ f & \mapsto & f(1) \end{array}$$

pues el punto $\{1\}$ es un subespacio cerrado del círculo. El teorema de escisión nos da

$$\begin{tikzcd} HP_0(\mathcal{S}) \arrow[r] & HP_0(A) \arrow[r] & HP_0(\mathbb{C}) \arrow[d] \\ HP_1(\mathbb{C}) \arrow[u] \arrow[r] & HP_1(A) \arrow[r] & HP_1(\mathcal{S}) \end{tikzcd}$$

¿Cómo es $\mathcal{S}$?

Figura 4.1 *El álgebra $\mathcal{S}$*

Tenemos que $\mathcal{S} \cong \{f : [0,1] \to \mathbb{C} \mid f(0) = 0 = f(1)\}$ Conocemos HP para $\mathbb{C}$, entonces queremos conocer la homología de S para poder calcular la homología de $A = C^\infty(S^1)$.

Sea

$$\mathcal{C} = \{f : [0,1] \to \mathbb{C} \mid f(0) = 0\}.$$

Figura 4.2 *El álgebra contráctil $\mathcal{C}$*

Por un lado $\mathcal{C}$ es contráctil, es decir $HP(\mathcal{C}) \cong 0$ y por otro lado tenemos la extensión

$$\begin{array}{rcl} 0 \to \mathcal{S} \to \mathcal{C} & \to & \mathbb{C} \to 0 \\ f & \mapsto & f(1) \end{array}$$

lo cual nos da la sucesión exacta

$$\begin{tikzcd} HP_0(\mathcal{S}) \arrow[r] & HP_0(\mathcal{C}) \arrow[r] & HP_0(\mathbb{C}) \arrow[d] \\ HP_1(\mathbb{C}) \arrow[u] \arrow[r] & HP_1(\mathcal{C}) \arrow[r] & HP_1(\mathcal{S}) \end{tikzcd}$$

La propiedad de las sucesiones exactas que utilizamos es la siguiente: Si tenemos una sucesión exacta:

$$0 \to A \to B \to 0$$

entonces A y B son isomorfos.

Aplicando esta propiedad a la sucesión exacta anterior obtenemos (Acordarse que la homología de $\mathbb{C}$ es cero en grado uno y $\mathbb{C}$ en grado cero.)

$$\begin{array}{rcl} HP_0(\mathcal{S}) & \cong & 0 \\ HP_1(\mathcal{S}) & \cong & \mathbb{C} \end{array}$$

La sucesión exacta larga

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & HP_0(A) \arrow[r] & \mathbb{C} \arrow[d, "0"] \\ 0 \arrow[u] \arrow[r] & HP_1(A) \arrow[r] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

se puede descomponer en dos sucesiones

$$0 \longrightarrow HP_0(A) \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow HP_1(A) \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

lo que nos da finalmente

$$\begin{array}{rcl} HP_0(C^\infty(S^1)) & \cong & \mathbb{C} \\ HP_1(C^\infty(S^1)) & \cong & \mathbb{C}. \end{array}$$

Referencias

[1] Cuntz, Joachim; Quillen, Daniel. (1997). *Excision in bivariant periodic cyclic cohomology"*. Invent. Math. 127, No.1, pp. 67-98.

[2] Massey, William S. (1991). *A basic course in algebraic topology"*. New York : Springer, Graduate Texts in Mathematics; V. 127.

[3] Valqui, Christian. (1998). *Pro-Vektorräume, Pro-Algebren und bivariante periodische zyklische Homologie"*. (Thesis) SFB Preprint 29. http://wwwmath.uni-muenster.de/math/inst/sfb/about/publ/ valqui01.html.

Christian Valqui
Sección Matemáticas
Departamento de Ciencias
Pontificia Universidad Católica del Perú
cvalqui@pucp.edu.pe