Pro Mathematica Vol. XVI, Nos. 31-32, 2002

PRO-MÓDULOS

Christian ***Valqui***

Resumen

Definimos de una manera elemental la categoría de pro-módulos indexados por $\mathbb{N}$ *y caracterizamos los pro-módulos inyectivos y proyectivos. Construimos una resolución proyectiva y una inyectiva para cualquier pro-módulo. Finalmente analizamos la definición de los morfismos en la pro-categoría usando límites y definimos además* lim^1.

1 Introducción

Las categorías que se analizan en los primeros años de estudios de matemática generalmente son categorías de conjuntos con cierta estructura, y un morfismo es una función que se aplica a cada elemento de uno de esos conjuntos y que preserva la estructura. El estudio de los pro-módulos es una buena introducción para empezar a pensar en categorías con flechas que no necesariamente son funciones sobre ciertos conjuntos. En el presente trabajo sobre pro-módulos se imita ciertas construcciones para módulos, de modo que alguien familiarizado con teoría homológica de módulos puede transferir sus conocimientos sobre la categoría de módulos a la de pro-módulos. Los recientes trabajos de investigación del autor hacen uso extensivo de las pro-categorías y esto está relacionado con el uso que se hace de ellas para demostrar el teorema de escisión de Cuntz y Quillen [CQ4]. Manejar con seguridad estas categorías simplifica enormemente la comprensión de este resultado.

La cohomología cíclica periódica es el límite de un sistema directo, pero al pasar al límite se pierde alguna información. Por eso es conveniente considerar las estructuras de sistemas inversos y/o directos, antes de pasar al límite. Esto se hace considerando las pro-categorías, los procomplejos, etc. Cabe mencionar que casi todos los trabajos relacionados con el resultado de escisión de Cuntz y Quillen usan las pro-categorías; algunos que no lo hacen (ver por ejemplo [E]) se vuelven engorrosos al tener que demostrar propiedades que haciendo uso de las pro-categorías son triviales. El presente trabajo contiene conceptos básicos que debería permitir comprender el primer capítulo de la tesis del autor, que puede trabajarse a continuación. Otra aplicación de estos conceptos se da a través de la categoría dual, la categoría *Ind*. En un próximo trabajo veremos como el uso de esta categoría simplifica algunos resultados relacionados con "Shape theory".

2 Definición y Ejemplos de Categorías

Definición: Una categoría es un cuarteto $\mathcal{C} = (\mathcal{O}, hom, id, \circ)$ consistente de:

1. Una clase $\mathcal{O}$ de objetos, denotada por $Ob(\mathcal{C})$.

2. Para cada par de objetos (A, B) un conjunto $hom(A, B)$, cuyos miembros son llamados morfismos de A en B, se expresa graficamente como $A \xrightarrow{f} B$ o $f : A \to B$.

3. Para cada objeto A de $\mathcal{C}$ un morfismo $A \xrightarrow{Id_A} A$, la identidad de A.

4. Una ley de composición que asocia a cada par de morfismos $A \xrightarrow{f} B$ y $B \xrightarrow{g} C$ un morfismo $A \xrightarrow{g \circ f} C$, la composición de f y g.

Además se cumplen las siguientes condiciones:

A1 La composición es asociativa, es decir, para morfismos $A \xrightarrow{f} B$, $B \xrightarrow{g} C$ y $C \xrightarrow{h} D$, se cumple que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

A2 La identidad actúa como elemento neutro respecto a la composición, es decir, para todo $A \xrightarrow{f} B$ tenemos que $id_B \circ f = f$ y $f \circ id_A = f$.

Como ejemplos tenemos:

1. La categoría de conjuntos. Aquí hom(A,B) es el conjunto de las funciones de A en B; la identidad y la composición son las usuales.

2. Las siguientes categorías de conjuntos con estructura:

   (a) $\mathbf{Vec_k}$ con objetos los espacios vectoriales sobre $\mathbf{k}$ y con morfismos las transformaciones lineales entre ellos.

   (b) **Gr** con objetos los grupos y con morfismos los homomorfismos de grupos.

   (c) **Top** con objetos los espacios topológicos y con morfismos las funciones continuas.

   (d) $\mathbf{Alg_k}$ con objetos las álgebras sobre $\mathbf{k}$ y con morfismos los homomorfismos de álgebras.

   (e) $\mathbf{m - Alg}$ con objetos las m-álgebras (que son álgebras localmente convexas de modo que la topología está dada por una familia de seminormas submultiplicativas) y con morfismos los homomorfismos de álgebras que sean continuos.

   (f) $\mathbf{c - Alg}$ con objetos las c-álgebras (que son álgebras localmente convexas de modo que la multiplicación sea continua) y con morfismos los homomorfismos de álgebras que sean continuos.

3. Cada clase X forma una categoría (llamada discreta) donde los objetos son los miembros de X y los únicos morfismos son los morfismos identidad.

4. Una clase con un preorden $(X, \leq)$ forma una categoría con objetos los miembros de X y

$$hom(x, y) = \begin{cases} \{(x, y)\} & si \quad x \leq y \\ \emptyset & \quad e.o.c. \end{cases}$$

5. A cada semigrupo con unidad G se le asocia una categoría, con un solo objeto G y con morfismos los elementos del semigrupo con la composición dada por la operación del semigrupo.

3 Pro-categorías

A cada categoría $\mathcal{C}$ le vamos a asociar la categoría pro-$\mathcal{C}$ que es la pro-categoría indexada por los números naturales. Un objeto de pro-$\mathcal{C}$ es una familia $A = (A_n)$ de objetos de $\mathcal{C}$ indexada por $\mathbb{N}$ conjuntamente con morfismos en $\mathcal{C}$, $\sigma_n : A_n \to A_{n-1}$, $n > 1$, llamados mapeos estructurales. Los morfismos de un objeto A a otro objeto B en pro-$\mathcal{C}$ son clases de equivalencia de "flechas". Una flecha de A en B está dada por un par (f, N), donde $N : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una función estrictamente creciente, y f es una familia de morfismos $\{f_n : A_{N(n)} \to B_n\}$ de modo que para todo n el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{array}{ccc} A_{N(n+1)} & \xrightarrow{f_{n+1}} & B_{n+1} \\ \sigma \downarrow & & \sigma \downarrow \\ A_{N(n)} & \xrightarrow{f_n} & B_n \end{array}$$

Para simplificar la notación vamos a escribir $\sigma_{n,k}$ para la composición $\sigma_{k+1} \circ \sigma_{k+2} \circ \cdots \circ \sigma_{n-1} \circ \sigma_n$ o simplemente σ si se sobrentienden el dominio y el codominio.

Dos flechas $(f, N), (g, M)$ de A en B son equivalentes si para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un $m \in \mathbb{N}$, con $m \geq N(n), M(n)$, de modo que $f_n \circ \sigma_{m,N(n)} = g_n \circ \sigma_{m,M(n)}$.

Ejercicio 3.1. *Demostrar que (Id, Id) y (σ, N) son equivalentes como flechas de A en A, donde N es cualquier función estrictamente creciente con $N(n) > n$ (por ejemplo $N(n) = n+1$) y σ el correspondiente mapeo estructural.*

Ejercicio 3.2. *Demostrar que para cada pro-objeto A y cada función inyectiva creciente $N : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ el pro-objeto $\bar{A} = (A_{N(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ es isomorfo a A.(Es decir, existen flechas de A en $\bar{A}$ y viceversa cuya composición es igual a $\sigma \sim Id$).*

Verifiquemos las construcciones y condiciones de categoría para pro-$\mathcal{C}$:
Dados los objetos y los morfismos, requerimos del morfismo identidad, que viene dado por $(Id, Id) := \{Id_n : A_n \to A_n\}$ y la ley de composición, que vamos a definir del siguiente modo:
Si $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ son dos morfismos entonces $(g, M) \circ (f, N) = (gf, N \circ M)$ donde $gf_n = g_n \circ f_{M(n)} : A_{N(M(n))} \to C_n$. Se comprueba que el par obtenido es compatible con los mapeos estructurales y nos da por lo tanto una flecha. Además la composición respeta clases de equivalencia y por lo tanto nos da una ley de composición para morfismos. Se verifica directamente sobre las flechas la asociatividad de la composición y que Id es el elemento neutro de la composición; por lo tanto $A1$ y $A2$ valen para los morfismos.

Ejercicio 3.3. *Demostrar que todo morfismo $f : A \to B$ se puede representar por una familia $f_n : A_n \to B_n$, reemplazando A por un pro-módulo isomorfo.*

Comentario: También se puede definir directamente los morfismos de A en B a través de:

$$Hom(A, B) := \varprojlim_m \varinjlim_n hom(A_n, B_m),$$

lo cual nos da una descripción equivalente que vamos a analizar más adelante. Mientras tanto usamos nuestra presentación, desarrollando la intuición para trabajar con límites. Nosotros nos vamos a restringir a algunas pocas pro-categorías, principalmente la pro-categoría correspondiente a la categoría de módulos sobre un anillo fijo Λ. Se tiene el siguiente teorema, que no vamos a demostrar, pero del cual vamos a ver varios aspectos en el caso de pro-módulos.

Teorema 3.4 (prop. A.4.5. [AM]). *Si C es una categoría aditiva (respectivamente abeliana), entonces pro-C es una categoría aditiva (respectivamente abeliana).*

4 Pro-módulos

Vamos a fijar un anillo Λ y llamaremos pro-módulos a los pro-Λ-módulos. Por el teorema 3.4 la categoría de pro-módulos es una categoría abeliana. Vamos a caracterizar los pro-módulos proyectivos y los inyectivos. Así podremos construir resoluciones inyectivas y proyectivas para cualquier pro-módulo, lo cual nos garantiza la existencia de Ext^n.

Para cada flecha f pondremos $Ker(f) = (Ker(f_n))$ y $Coker(f) = (Coker(f_n))$. El pro-módulo 0 es el que tiene en cada nivel el módulo 0. Dejamos como ejercicio al lector demostrar las siguientes afirmaciones:

Ejercicio 4.1. *Un pro-módulo A es isomorfo a 0 si y solamente si cumple la siguiente propiedad: Para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma_{N,n} = 0$.*

Ejercicio 4.2. *$Ker(f) \cong Ker(f')$ y $Coker(f) \cong Coker(f')$ para cada f' equivalente a f, por lo tanto $Ker([f])$ y $Coker([f])$ están bien definidos salvo isomorfismos de pro-módulos.*

Ejercicio 4.3. *Para cada morfismo $f : A \to B$ la inclusión $Ker(f) \hookrightarrow A$ es un kernel de f en el sentido de [ML, VIII.1,p.187].*

Ejercicio 4.4. *Para cada morfismo $f : A \to B$ la sobreyección $B \to Coker(f)$ es un cokernel en el sentido de [ML, III.3,p.64].*

Ejercicio 4.5. *Cualquier pro-módulo isomorfo al 0 es un objeto nulo en el sentido categórico –inicial y terminal a la vez ([ML, I.5,p.20]).*

Definición 4.6. *Un morfismo [f] es llamado inyectivo si $Ker([f]) \cong 0$ y sobreyectivo si $Coker([f]) \cong 0$.*

Definición 4.7. *Decimos que una secuencia $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ es exacta si $g \circ f = 0$ y la inclusión canónica $Im(f) \hookrightarrow Ker(f)$ es un isomorfismo.*

Notemos que f y g se pueden realizar con familias $\{A_n \xrightarrow{f_n} B_n \xrightarrow{g_n} C_n\}$ de modo que $g_n \circ f_n = 0$, lo cual nos da la inclusión canónica mencionada en la definición.

Como ejemplo tenemos las secuencias $Ker(f) \to A \xrightarrow{f} B$ y $A \xrightarrow{f} B \to Coker(f)$ que son exactas.

5 Pro-módulos Inyectivos

Definición 5.1. *Un morfismo f es llamado inyectivo si $Ker(f) \cong 0$.*

Una consecuencia directa de la proposición 5.2 es que un morfismo f es inyectivo si y solamente si $0 \to A \xrightarrow{f} B$ es exacto.

Proposición 5.2. *Un morfismo $f : A \to B$ de pro-módulos es inyectivo si y solamente si se puede representar por una flecha que en cada nivel es inyectiva.*

<u>Demostración:</u> Queremos reemplazar A por un objeto isomorfo de modo que el morfismo inducido por f tenga un representante con las características pedidas. Por el ejercicio 3.3 podemos suponer que f está dado por $f_n : A_n \to B_n$.

Sea $f : A \to B$ inyectivo en cada nivel. Entonces es claro que $Ker(f) = 0$. Como $Ker(f) \cong Ker(f')$ si $f \sim f'$, se obtiene la afirmación.

Sea por otro lado f inyectivo. Reemplacemos A por $\bar{A} = (A_n/Ker(f_n))$. Es obvio que el morfismo $\bar{f} : \bar{A} \to B$ inducido por f es inyectivo en cada nivel, resta probar que $A \cong (A_n/Ker(f_n))$. Notemos que por el ejercicio 4.1 para cada n existe un N de modo que $0 = \sigma^K : Ker(f_N) \to Ker(f_n)$ Veamos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
Ker(f_N) \arrow[r] \arrow[d, "\sigma^K=0"'] & A_N \arrow[r] \arrow[d, "\sigma"'] & A_N/Ker(f_N) \arrow[dl, dotted, "\bar{\sigma}"] \\
Ker(f_n) \arrow[r] & A_n &
\end{tikzcd}$$

Como $\sigma|_{Ker(f_N)} = 0$, está bien definido $\bar{\sigma} : A_N/Ker(f_N) \to A_n$. Se verifica que la familia de los $\bar{\sigma}$ definen un morfismo inverso al morfismo canónico $A \to A/Ker(f)$. $\square$

Ahora que hemos caracterizado la noción de morfismo inyectivo vamos a definir lo que son objetos inyectivos.

Definición 5.3. *Un pro-módulo I es inyectivo si todo diagrama de flechas sólidas*

$$\begin{tikzcd} & I & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"'] & B \arrow[ul, dotted, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

donde la fila es exacta (es decir, i es inyectivo) se puede completar con una flecha punteada φ, de modo que el diagrama conmute.

Teorema 5.4. *Sea $E_k, k = 1, 2, \ldots$ una secuencia de Λ-módulos inyectivos y*

$$V_n = \bigoplus_{k=1}^{n} E_k \ .$$

Entonces el pro-módulo (V_n) con las proyecciones canónicas $V_{n+1} \longrightarrow V_n$ como mapeos estructurales es un pro-módulo inyectivo.

<u>Demostración:</u> Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} & V & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"'] & B \end{tikzcd}$$

Construiremos inductivamente el morfismo $\varphi : B \to V$ que haga conmutar al diagrama. Supongamos que i esté dado por morfismos inyectivos $i_n : A_n \to B_n$. Para $n = 1$ se puede completar el diagrama

$$\begin{tikzcd} & E_1 = V_1 & \\ 0 \arrow[r] & A_{N(1)} \arrow[u, "f_1"] \arrow[r, "i_{N(1)}"'] & B_{N(1)} \arrow[ul, dotted, "\bar{\varphi}_1 = \varphi_1"'] \end{tikzcd}$$

con φ_1 pues E_1 es inyectivo.

Supongamos que tenemos definidos φ_k para todo $k < n$, compatibles con σ y de modo que conmute

$$\begin{tikzcd} & V_k = \bigoplus_{j=1}^{k} E_j & \\ 0 \arrow[r] & A_{N(k)} \arrow[u, "f_k"] \arrow[r, "i_{N(k)}"'] & B_{N(k)} \arrow[ul, "\varphi_k"'] \end{tikzcd}$$

Como E_n es inyectivo podemos encontrar un $\bar{\varphi}_n : B_{N(n)} \to E_n$ de modo que conmute

$$\begin{tikzcd} & E_n & \\ 0 \arrow[r] & A_{N(n)} \arrow[u, "\pi_n \circ f_n"] \arrow[r, "i_{N(n)}"'] & B_{N(n)} \arrow[ul, dotted, "\bar{\varphi}_n"'] \end{tikzcd}$$

donde $\pi_n : V_n \to E_n$ es la proyección canónica. Ahora definimos $\varphi_n = (\varphi_{n-1} \circ \sigma, \bar{\varphi}_n)$ y vemos que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} & V_n = \bigoplus_{k=1}^{n-1} E_k \oplus E_n & \\ 0 \arrow[r] & A_{N(n)} \arrow[u, "f_n"] \arrow[r, "i_{N(n)}"'] & B_{N(n)} \arrow[ul, "\varphi_n"'] \end{tikzcd}$$

Se verifica que φ_n es compatible con σ. Por lo tanto la familia $\{\varphi_n\}$ así definida nos da un morfismo φ de pro-módulos. Por construcción este morfismo cumple $\varphi \circ i = f$. □

6 Pro-módulos Proyectivos

Definición 6.1. *Un morfismo f es llamado sobreyectivo si $Coker(f) \cong 0$.*

Una consecuencia directa de la proposición 6.2 es que un morfismo f es sobreyectivo si y solmente si $A \xrightarrow{f} B \to 0$ es exacto.

Proposición 6.2. *Un morfismo $f : A \to B$ de pro-módulos es sobreyectivo si y solamente si se puede representar por una flecha que en cada nivel es sobreyectiva.*

Demostración: Queremos reemplazar B por un objeto isomorfo de modo que el morfismo inducido por f tenga un representante con las características pedidas. Por el ejercicio 3.3 podemos suponer que f está dado por $f_n : A_n \to B_n$.

Sea $f : A \to B$ sobreyectivo en cada nivel. Entonces es claro que $Coker(f) = 0$. Como $Coker(f) \cong Coker(f')$ si $f \sim f'$, se obtiene una implicación.

Sea por otro lado f sobreyectivo. Reemplacemos B por $\bar{B} = (Im(f_n))$. Es obvio que el morfismo $\bar{f} : A \to \bar{B}$ inducido por f es sobreyectivo en cada nivel, resta probar que $B \cong (Im(f_n))$. Notemos que por el ejercicio 4.1 para cada n existe un N de modo que $0 = \sigma^C : Coker(f_N) \to Coker(f_n)$ Veamos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} Im(f_N) \arrow[r] \arrow[d, "\sigma"'] & B_N \arrow[r] \arrow[d, "\sigma"] \arrow[dl, dotted, "\bar{\sigma}"] & Coker(f_N) \arrow[d, "\sigma^C=0"] \\ Im(f_n) \arrow[r] & B_n \arrow[r, "\pi"'] & Coker(f_n) \end{tikzcd}$$

Como $\pi \circ \sigma = 0$, $Im(\sigma) \subset Ker(\pi) = Im(f_n)$. Ponemos $\bar{\sigma} : B_N \to Im(f_n)$. Se verifica que la familia de los $\bar{\sigma}$ definen un morfismo inverso al morfismo canónico $Im(f) \to B$. □

Ahora que hemos caracterizado la noción de morfismo sobreyectivo vamos a definir lo que son objetos proyectivos.

Definición 6.3. *Un pro-módulo P es proyectivo si todo diagrama de flechas sólidas*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, dotted, "\psi"] & \\ 0 & A \arrow[l] & B \arrow[l, "\pi"'] \end{tikzcd}$$

donde la fila es exacta (es decir, π es sobreyectivo) se puede completar con una flecha punteada ψ, de modo que el diagrama conmute.

Teorema 6.4. *Sea $E_k, k = 1, 2, \ldots$ una secuencia de Λ-módulos proyectivos y*

$$W_n = \bigoplus_{k \geq n} E_k \ .$$

Entonces el pro-módulo (W_n), con las inyecciones canónicas $W_{n-1} \longrightarrow W_n$ como mapeos estructurales, es un pro-módulo proyectivo.

Demostración: Sea $B \xrightarrow{\pi} A$ un morfismo sobreyectivo y $W \xrightarrow{f} A$ un morfismo. Podemos suponer que π está dado por $\pi_n : B_n \to A_n$, donde los π_n son sobreyectivos. Redefiniendo los E_k (como $\bigoplus_{j=N(k)}^{N(k+1)-1} E_j$) y correspondientemente los W_n se puede suponer que f está dado por $f_n : W_n \to A_n$.

Para $k \geq n$ se tiene una inclusión $i_n^k : E_k \to W_n = \bigoplus_{k \geq n} E_k$ y una proyección $p_n^k : W_n \to E_k$. Ponemos $f_n^k = f_n \circ i_n^k = f_n|_{E_k}$. Como E_k es proyectivo encontramos $\bar{\psi}_k : E_k \to B_k$ de modo que $\pi_k \bar{\psi}_k = f_k^k$ (ver diagrama).

$$\begin{tikzcd} & E_k \arrow[d, "f_k^k"'] \arrow[dr, dotted, "\bar{\psi}_k"] & \\ 0 & A_k \arrow[l] & B_k \arrow[l, "\pi_k"'] \end{tikzcd}$$

Finalmente definimos

$$\psi_n = \sum_{k \geq n} \sigma_{k,n} \bar{\psi}_k p_n^k : W_n \to B_n.$$

Se verifica que esto define un pro-morfismo y además se tiene:

$$\begin{aligned} \pi_n \circ \psi_n &= \sum_{k \geq n} \pi_n \sigma_{k,n} \bar{\psi}_k p_n^k \\ &= \sum_{k \geq n} \sigma_{k,n} \pi_k \bar{\psi}_k p_n^k \\ &= \sum_{k \geq n} \sigma_{k,n} f_k^k p_n^k \\ &= \sum_{k \geq n} f_n^k p_n^k \\ &= f_n \end{aligned}$$

□

7 Resoluciones

La construcción estándar de $Ext^n(A,B)$ (ver por ejemplo [HS, IV.7, pág. 139]) se hace de la siguiente manera: Tomamos una resolución proyectiva (completa) de A, que es una secuencia exacta

$$\cdots \to P_n \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to A \to 0$$

donde los P_j son proyectivos. Al complejo

$$\mathbf{P} \; : \quad \cdots \to P_n \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to 0$$

le aplicamos el funtor $Hom(-,B)$ obteniendo así el complejo de cocadenas

$$0 \to Hom(P_0, B) \to Hom(P_1, B) \to \cdots \to Hom(P_n, B) \to \ldots$$

Por definición la cohomología de este complejo es Ext, es decir

$$Ext^n(A,B) := H^n(Hom(\mathbf{P}, B))$$

Se puede tomar también una resolución inyectiva de B

$$0 \to B \to I_0 \to I_1 \to \cdots \to I_n \to \ldots$$

y se verifica que $Ext^n(A,B) \cong H_n(Hom(A,\mathbf{I}))$ ([HS, IV.8, pág. 143]).

Todo este proceso, que se hace originalmente en la categoría de módulos, se puede repetir en la categoría de pro-módulos, una vez que se garantice la existencia de resoluciones proyectivas e inyectivas. A continuación vamos a construir estas resoluciones.

Teorema 7.1. *Para todo pro-módulo Y existe una inclusión $Y \hookrightarrow Z$ donde Z es un pro-módulo inyectivo.*

<u>Demostración:</u> Sea $Y = ((Y_m), \sigma_m)$ un pro-módulo. En cada nivel encontramos una inclusión $Y_m \overset{\iota_m}{\hookrightarrow} M_m$ en un módulo inyectivo M_m. La inyectividad de M_m nos permite extender el mapeo $\iota_m \circ \sigma_{m+1}$ a un mapeo $\tau_{m+1} : M_{m+1} \to M_m$. Con los τ_m como mapeos estructurales los M_m forman un pro-módulo $M = ((M_m), \tau_m)$. Las inclusiones ι_m nos dan una inclusión de pro-módulos $Y \hookrightarrow M$. Ahora construimos el pro-módulo Z con

$$Z_n := \bigoplus_{k=1}^{n} M_k$$

y las proyecciones canónicas como mapeos estructurales. Por el teorema 5.4 esto es un pro-módulo inyectivo. Tenemos mapeos inyectivos

$$M_n \hookrightarrow Z_n \quad , \quad x \mapsto (\tau_{n1}(x), \ldots, \tau_{nk}(x), \ldots, \tau_{nn}(x))$$

que dan un morfismo inyectivo de pro-módulos. La composición con $Y \hookrightarrow M$ nos da la inclusión $Y \hookrightarrow Z$ que buscabamos. □

Corolario 7.2. *Todo pro-módulo admite una resolución inyectiva.*

Demostración: Se usa el método estándar: Por el teorema existe una inclusión $Y \hookrightarrow I_0$. Llamemos al pro-módulo cociente Q_0. Entonces tenemos una secuencia exacta corta:

$$0 \to Y \to I_0 \to Q_0 \to 0$$

Aplicando nuevamente el teorema obtenemos una inclusión $Q_0 \hookrightarrow I_1$ con cociente Q_1. Pegando $0 \to Y \to I_0 \to Q_0 \to 0$ con $0 \to Q_0 \to I_1 \to Q_1 \to 0$ obtenemos la secuencia exacta:

$$0 \to Y \to I_0 \to I_1 \to Q_1 \to 0$$

Este procedimiento se puede repetir para todo n y se obtiene una secuencia infinita

$$0 \to Y \to I_0 \to I_1 \to I_2 \to I_3 \to \ldots$$

que es precisamente la resolución inyectiva (completa) buscada. □

Teorema 7.3. *Para todo pro-módulo X existe una sobreyección $P \to X$ donde P es un pro-módulo proyectivo.*

Demostración: Sea $X = ((X_m), \sigma_m)$ un pro-módulo. En cada nivel encontramos una sobreyección $\pi_m : N_m \to X_m$ donde N_m es un módulo proyectivo. La proyectividad de N_m nos permite levantar para cada m el mapeo $\sigma_m \circ \pi_m$ a un mapeo $\tau_m : N_m \to N_{m-1}$. Con los τ_m como mapeos estructurales los N_m forman un pro-módulo $N = ((N_m), \tau_m)$. Las sobreyecciones π_m nos dan un morfismo sobreyectivo $N \to X$. Ahora construimos el pro-módulo Q con

$$Q_n := \bigoplus_{k=n}^{\infty} N_k$$

y las inclusiones canónicas como mapeos estructurales. Por teorema 6.4 esto es un pro-módulo proyectivo. Tenemos mapeos sobreyectivos

$$\pi_n : Q_n \to N_n \quad , \quad (x_k)_{k\geq n} \mapsto \sum_{k\geq n} \sigma_{kn}(x_k)$$

donde $(x_k)_{k\geq n} \in Q_n$. Estos mapeos forman un pro-morfismo sobreyectivo y la composición con el morfismo $N \to X$ nos da el morfismo sobreyectivo buscado $P \to X$. □

Corolario 7.4. *Todo pro-módulo admite una resolución proyectiva.*

Demostración: Se usa el mismo método estándar del corolario anterior: Por el teorema existe una sobreyección $P_0 \to X$. Llamemos al núcleo R_0. Entonces tenemos una secuencia exacta corta:

$$0 \to R_0 \to P_0 \to X \to 0$$

Aplicando nuevamente el teorema obtenemos una sobreyección $P_1 \to R_0$ con núcleo R_1. Pegando $0 \to R_0 \to P_0 \to X \to 0$ con $0 \to R_1 \to P_1 \to R_0 \to 0$ obtenemos la secuencia exacta:

$$0 \to R_1 \to P_1 \to P_0 \to X \to 0$$

Este procedimiento se puede repetir para todo n y se obtiene una secuencia infinita

$$\cdots \to P_3 \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to X \to 0$$

que forma la resolución proyectiva (completa) buscada. □

8 Límites Contables

Veremos la definición formal del límite directo y del inverso. Veremos una definicón de los pro-morfismos usando estos límites y analizamos la relación que existe con la definición elemental que dimos, relación que ya estaba presente tacitamente en lo que construíamos. Luego caracterizamos los límites de modo que podamos demostrar la exactitud del límite directo y encontrar en $\lim^1$ el funtor derivado del límite inverso.

Definición 8.1. *Si (A_n, σ) es un sistema inverso (indexado por $\mathbb{N}$) en una categoría de conjuntos con estructura (Λ-módulos, álgebras, etc.) con productos contables, entonces el límite inverso, llamado liminv (A_n) o también $\varprojlim A_n$ es el subobjeto de $\prod_n A_n$ formado por las secuencias $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ compatibles con los mapeos estructurales. Esto es, son las secuencias tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $a_n = \sigma_{n+1}(a_{n+1})$.*

Un sistema directo (indexado por $\mathbb{N}$) es una familia $(A_n, \tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde $\tau_n : A_n \to A_{n+1}$. Formamos el conjunto de secuencias estables. Un par $((a_n), N)$ se llama una secuencia estable si (a_n) es una secuencia y si $N \in \mathbb{N}$ de modo que $\tau_n(a_n) = a_{n+1}$ para todo $n \geq N$. Dos secuencias estables $((a_n), N_a)$, $((b_n), N_b)$ son equivalentes si existe $M \geq N_a, N_b$ de modo que $a_n = b_n$ para todo $n \geq M$.

Definición 8.2. *El límite directo de un sistema directo es el conjunto de clases de equivalencia de secuencias estables y se denota por limdir(A_n) o también $\varinjlim A_n$.*

Teorema 8.3. *Para dos objetos en la pro-categoría se tiene que*

$$Hom(A, B) \cong \varprojlim_m \varinjlim_n hom(A_n, B_m),$$

Demostración: Vamos a definir un morfismo de $Hom(A, B)$ hacia $\varprojlim_m \varinjlim_n hom(A_n, B_m)$, veremos luego que es un isomorfismo. Para esto tomemos un representante de $[(f, N)] \in Hom(A, B)$. Sabemos que $f = (f_m : A_{N(m)} \to B_m)$. Cada f_m nos define un elemento $[f_m]$ de $\varinjlim_n hom(A_n, B_m)$, dado por la sucesión estable $(\overbrace{0, 0, \ldots, 0}^{N-1}, f_m, f_m \circ \sigma_N, f_m \circ \sigma^N \circ \sigma_{N+1}, \ldots)$, donde $N = N(m)$. Mas aún, por la compatibilidad de los f_m con σ, se tiene que $\sigma \circ f_m = f_{m-1} \circ \sigma$, por lo tanto $\sigma^*[f_m] = [\sigma f_m] = [f_{m-1}]$ en $\varinjlim_n hom(A_n, B_{m-1})$. Esto significa que la familia $([f_m])_{m\in\mathbb{N}} \in \prod_m \varinjlim_n hom(A_n, B_m)$ es compatible con los mapeos estructurales $\tau_m = \sigma^*_{m+1}$ y por lo tanto un elemento de $\varprojlim_m \varinjlim_n hom(A_n, B_m)$. Definimos entonces $\Psi(f, N) := ([f_m])$. La definición no depende del representante: Dos flechas $(f, N), (g, M)$ de

A en B son equivalentes si para todo $m \in \mathbb{N}$ existe un $K \in \mathbb{N}$, con $K \geq N(n), M(n)$, de modo que $f_m \circ \sigma_{K,N(m)} = g_m \circ \sigma_{K,M(m)}$. Esto significa que $[f_m] = [g_m]$ en $\varinjlim_n hom(A_n, B_m)$ para todo m, por lo tanto $\Psi(f, N) = ([f_m]) = ([g_m]) = \Psi(g, M)$.

Inyectividad: Si $\Psi(f, N) = ([f_m]) = ([g_m]) = \Psi(g, M)$, entonces $[f_m] = [g_m]$ en $\varinjlim_n hom(A_n, B_m)$ para todo m. Esto significa que las secuencias estables inducidas por f_m y g_m respectivamente coinciden a partir de un $K \geq N(m), M(m)$. Pero esto significa justamente que $\tau_{N,K}(f_m) = \tau_{M,K}(g_m)$. Finalmente tenemos que

$$\begin{aligned} f_m \circ \sigma_{K,N(m)} &= \sigma^*_{K,N}(f_m) \\ &= \tau_{N,K}(f_m) \\ &= \tau_{M,K}(g_m) \\ &= \sigma^*_{K,M(m)}(g_m) \\ &= g_m \circ \sigma_{K,M(m)}, \end{aligned}$$

como esto sucede para todo m, se tiene que las flechas (f, N) y (g, M) son equivalentes.

Sobreyectividad: Sea $([f_m])$ un elemento de $\varprojlim_m \varinjlim_n hom(A_n, B_m)$. Tomando un representante f_m en cada nivel se obtiene una familia de funciones $f_m : A_M(m) \to B_m$ con $[f_m] = [\sigma f_{m+1}]$ lo cual no significa que necesariamente sea compatible con los σ. Siguiendo un proceso inductivo se puede reemplazar sin embargo f_m por $\bar{f}_m = f_m \circ \sigma_{N(m),M(m)}$ de modo que sea compatible con $\bar{f}_{m-1}$, obteniendo así una flecha que es llevada por Ψ a $([\bar{f}_m]) = ([f_m])$. $\square$

9 Exactitud de los Límites

Si la categoría es abeliana, en particular si es la categoría de Λ-módulos, entonces se puede analizar la exactitud de los límites. Veremos que el límite directo es un funtor exacto y que el límite inverso es exacto a izquierda, teniendo en el caso de indexación contable solamente un funtor derivado $\lim^1$. Veremos distintas caracterizaciones de los límites que nos permitirán llegar a los resultados de exactitud. En el caso de Λ-módulos se tiene una descripción de $\varprojlim$ en términos de Hom de la pro-categoría:

$$\varprojlim A_n \cong Hom(\Lambda, A)$$

donde Λ es el pro-módulo constante Λ en cada nivel con la identidad de mapeo estructural. Para esto le asignamos a cada secuencia compatible (a_n) del límite inverso la familia de morfismos $f_n : \Lambda \to A_n$ dada por $f_n(1) := a_n$, (un homomorfismo de Λ hacia otro módulo está completamente determinado por el valor en 1). Esta familia determina un pro-morfismo de Λ en A. Se verifica directamente que esta asignación está bien definida y es biyectiva.

El límite directo también tiene otra descripción en el caso de módulos, que es la que se encuentra usualmente en los libros: Sea $R \subset \bigoplus_n A_n$ el submódulo generado por los elementos de la forma $a_n - \tau(a_n)$, $a_n \in A_n, \tau(a_n) \in A_{n-1}$.

Proposición 9.1. *Existe un isomorfismo*

$$\Psi : \varinjlim A_n \to \bigoplus_n A_n/R.$$

<u>Demostración:</u> Notemos que en este caso el conjunto de secuencias estables $E(A)$ es un Λ-módulo y las secuencias estables equivalentes a la secuencia nula forman un submódulo $N(A)$. Construimos el Ψ de la siguiente forma: A cada secuencia estable $((a_n), N)$ le asignamos $a_N \in A_N \subset \bigoplus_n A_n$. Esto es un homomorfismo y como $[a_N] = [a_{N+1}] = [a_{N+2}] = \dots$ se verifica directamente que a dos secuencias estables equivalentes le asignamos el mismo elemento en el cociente $\bigoplus_n A_n/R$.

Definamos una aplicación inversa $\Phi : \bigoplus_n A_n \to E(A)$:
Definimos Φ sobre los generadores de la suma directa que son los elementos homogéneos:
Sea $y_N \in A_N$. Definimos $\Phi([y_N]) = [((y_n), N)]$, con $y_n = 0$ para $n < N$ y $y_n = \tau(y_{n-1})$ para $n > N$.

Luego extendemos por linealidad a toda la suma.
Los generadores de R son llevados a elementos de $N(A)$, por lo tanto Φ define un morfismo $\bigoplus_n A_n/R \to E(A)/N(A)$. Se verifica que este morfismo es el inverso de Ψ. □

Definición 9.2. *Sean $(A_n, \tau_n^A), (B_n, \tau_n^B)$ sistemas directos. Un morfismo de sistemas directos es una familia $(\{\phi_n : A_n \to B_n\}$ compatible con los τ.*

Si (ϕ_n) es un morfismo de sistemas directos, entonces induce un morfismo $\phi : \bigoplus_n A_n \to \bigoplus_n B_n$. Se cumple que $\phi(a_n - \tau(a_n)) = \phi(a_n) - \tau(\phi(a_n))$ para $a_n \in A_n$, por lo tanto ϕ lleva R_A en R_B, de modo que induce un morfismo $L\phi : \varinjlim A_n \to \varinjlim B_n$, dado por $L\phi[a_n] = [\phi_n(a_n)]$ para $a_n \in A_n \subset \bigoplus_m A_m$.

Proposición 9.3. *Sean $(A_n), (B_n)$ y (C_n) sistemas directos y $(\phi_n) : (A_n) \to (B_n)$,$(\psi_n) : (B_n) \to (C_n)$ morfismos de sistemas directos. Si para todo $n \in \mathbb{N}$ la secuencia*

$$A_n \xrightarrow{\phi_n} B_n \xrightarrow{\psi_n} C_n$$

es exacta, entonces la secuencia

$$\varinjlim A_n \xrightarrow{L\phi} \varinjlim B_n \xrightarrow{L\psi} \varinjlim C_n$$

es exacta.

Demostración: Es obvio que $L\psi \circ L\phi = 0$ pues ya lo es incluso en las sumas directas.

Para demostrar la inclusión $Ker(L\psi) \subset Im(L\phi)$ veremos primero que todo elemento de $\bigoplus_n B_n/R_B$ es la clase de algún elemento homogéneo. Sea $b \in \bigoplus_n B_n$, entonces $b = b_{n_1} + b_{n_2} + \cdots + b_{n_k}$, donde los $b_{n_j} \in B_{n_j}$ son elementos homogéneos. Sea $N = max\{n_j, j = 1, \ldots, k\}$. Entonces $\bar{b}_N = \tau_{n_1,N} b_{n_1} + \tau_{n_2,N} b_{n_2} + \ldots + \tau_{n_k,N} b_{n_k} \sim b$. Es decir, $[b] = [\bar{b}_N]$ con $\bar{b}_N \in B_N \subset \bigoplus_n B_n$.

Sea ahora $L\psi([b]) = 0$, es decir $L\psi([\bar{b}_N]) = [\psi_N \bar{b}_N] = 0$. Se verifica que para $x \in B_n$ se cumple que $[x] = 0$ si y solamente si existe un M de modo que $\tau_{n,M}(x) = 0$. Luego tenemos un M tal que $0 = \tau_{N,M}\psi_N(\bar{b}_N) = \psi_M \tau_{N,M}(\bar{b}_N)$. Como $Ker(\psi_M) = Im(\phi_M)$ encontramos un $a_M \in A_M$ tal que $\tau_{N,M}(\bar{b}_N) = \phi_M(a_M)$. Finalmente tenemos $[b] = [\bar{b}_N] = [\tau_{N,M}\bar{b}_N] = [\phi_M(a_M)] = L\phi[a_M] \in Im(L\phi)$. $\square$

Ahora veremos otra descripción del límite inverso. Como nuestra categoría es abeliana, podemos hablar de kernel y cokernel de un morfismo. En particular se verifica que $\varprojlim A_n$ es el kernel de la aplicación

$$\delta : \prod_n A_n \to \prod_n A_n$$

con $\delta(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) = (\sigma_2(a_2) - a_1,\, a_2 - \sigma_3(a_3),\, \ldots,\, (-1)^n a_n + (-1)^{n+1}\sigma_{n+1}(a_{n+1}, \ldots)$. Sin entrar en detalles de como se define el funtor derivado ponemos simplemente

$$\lim{}^1 A_n := coker(\delta)$$

Proposición 9.4. *Una secuencia exacta corta de sistemas inversos*

$$0 \to \{A_n\} \to \{B_n\} \to \{C_n\} \to 0$$

(es decir, $0 \to A_n \to B_n \to C_n \to 0$ *es exacto para cada* n*) induce una secuencia exacta*

$$0 \to \varprojlim A \to \varprojlim B \to \varprojlim C \to \lim{}^1 A \to \lim{}^1 B \to \lim{}^1 C \to 0$$

Demostración: Podemos ver $\prod_n X_n \xrightarrow{\delta} \prod_n X_n$ como un complejo de cocadenas $C^*(X)$ con $C^0(X) = C^1(X) = \prod_n X_n$, $C^k = 0$ para $k \geq 2$. Según esto, $\varprojlim X_n = H^0(C^*(X))$ y $\lim^1(X_n) = H^1(C^*(X))$. El enunciado del teorema nos da un secuencia exacta corta de complejos de cocadenas

$$0 \to C^*(A) \to C^*(B) \to C^*(C) \to 0.$$

La secuencia exacta larga en cohomología [HS, Th. IV.2.1, pág. 121] es exactamente la secuencia buscada.□

Referencias

[AM] ARTIN, Michael; MAZUR, Barry : *Etale homotopy* Lecture Notes in Mathematics. 100. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag. 169 p. (1969).

[CQ4] CUNTZ, Joachim; QUILLEN, Daniel : *Excision in bivariant periodic cyclic cohomology.* Invent. Math. 127, No.1, 67-98 (1997).

[E] EMMANOUIL, Ioannis : *On the excision theorem in bivariant periodic cyclic cohomology.* C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. I 323, No.3, 229-233 (1996).

[Gr] GRØNBÆK, Christian : *Bivariant periodic cyclic homology* Chapman & Hall /CRC, Research notes in mathematics (1999).

[HS] HILTON, Peter; STAMMBACH, Urs : *A course in homological algebra* Graduate texts in Mathematics 4, Berlin-Heidelberg-New York: Springer Verlag (1971)

[ML] MACLANE, Saunders : *Categories for the working mathematician* Graduate Texts in Mathematics 5, Springer-Verlag (1971)

[V1] VALQUI, Christian : *Pro-Vektorräume, Pro-Algebren und bivariante periodische zyklische Homologie.*(Tesis de doctorado) SFB Preprint 29 (1998) http://wwwmath.uni-muenster.de/math/inst/sfb/about/publ/valqui01.html

Christian Valqui
Sección Matemáticas. Departamento de Ciencias
Pontificia Universidad Católica del Perú
cvalqui@pucp.edu.pe