Pro Mathematica Vol. XVI, Nos. 31-32, 2002

COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE LA SOLUCIÓN DE UNA GENERALIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE BENJAMIN-BONA-MAHONY

Carlos ***Rodríguez Fernández***

Resumen

Se estudia el comportamiento asintótico de la solución global del problema no lineal $L\partial_t u + \partial_x u + a\,(t)\,u^p \partial_x u = 0$, $x \in \mathbf{R}$, $t > 0$ $u(0) = \varphi(x)$ *donde* $\varphi \in H^S(\mathbf{R})$, *p es un entero positivo y* $L : H^s(\mathbf{R}) \to L^2(\mathbf{R})$ *es el operador seudo-diferencial definido por* $\widehat{Lu}(y) = m(y)\widehat{u}(y)\, u \in H^s(\mathbf{R})$. *Para esto se utiliza el método de la fase estacionaria.*

Sección Matemáticas, Departamento de Ciencias, PUCP.

1 Introducción

La ecuación

$$\left(1-\partial_x^2\right)\partial_t u+\partial_x u+u^p\partial_x u=0, x\in\mathbf{R}, t>0 \tag{1}$$

es una generalización de la ecuación de Benjamin-Bona-Mahony (BBM),

$$u_t+u_x+uu_x-u_{xxt}=0, \tag{2}$$

y es un modelo matemático que describe la propagación unidireccional de ondas de dispersión débilmente no lineales de gran longitud de onda, tal como sucede cuando un fluido homogéneo discurre en un canal. Esta ecuación se puede considerar como una regularización pseudo-parabólica de la ecuación de Korteweg-de Vries (3) que modela ondas largas con pequeña amplitud en sistemas dispersivos no lineales y fue propuesta como un modelo alternativo para la ecuación de Korteweg-de Vries (KdV)

$$u_t+u_x+uu_x+u_{xxx}=0. \tag{3}$$

John Albert [2], estudió el comportamiento asintótico (en t) de una generalización de la ecuación (2)

$$\left(1-\partial_x^2\right)\partial_t u+\partial_x u+u^p\partial_x u=0, \quad x\in\mathbf{R},\ t>0, \tag{4}$$

donde p es un entero positivo; probando para este caso que si $u(x,0)=\varphi(x)$ es el dato inicial y si $\|\varphi\|_1+\|\varphi'\|_1+\|\varphi\|_5<\delta$, entonces la solución u de (4) satisface

$$\|u(x,t)\|_{L^\infty}\leq A(1+t)^{-1/3}$$

para toda $t>0$ y $x\in\mathbf{R}$, donde A no depende de x ni t.

Una ecuación más general que (4) es

$$\left(1-\partial_x^2\right)\partial_t u+\partial_x u+a(t)\,u^p\partial_x u=0,\ x\in\mathbf{R},\ t>0 \tag{5}$$

donde p es un entero positivo y $a:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ es una función continua acotada. Este coeficiente aparece en forma muy natural asumiendo que el fondo del canal donde discurre el fluido, no es liso; esto es, el fondo del canal es lo suficientemente rugoso para que el tirante del fluido varíe de una sección transversal a otra sección transversal inmediata del canal.

En ingeniería se estudian modelos físicos a escala que representan el movimiento del agua, bajo diferentes tipos de régimen (laminar, turbulento), donde se hace variar: la pendiente del canal, la rugosidad de las paredes y del fondo del mismo. Esto se realiza con el fin de determinar un modelo matemático que reproduzca con mayor precisión cada caso en estudio, pues tales modelos se pueden utilizar para diseñar obras de arte (canales, represas, etc.)

Por tanto, es de interés estudiar el comportamiento de la solución de la ecuación (5), pues ella modela con mayor precisión el movimiento de un fluido en un canal.

Estudiamos, entonces, el comportamiento asintótico de las soluciones del problema no lineal

$$\begin{cases} \left(1-\partial_x^2\right)\partial_t u + \partial_x u + a\left(t\right)u^p\partial_x u = 0 \quad x \in \mathbf{R},\ t>0 \\ \\ u(0) = \varphi \end{cases} \tag{6}$$

donde $\varphi \in H^S\left(\mathbf{R}\right)$, p es un entero positivo.

2 Resultados Básicos

Los siguientes dos lemas y la proposición serán útiles más adelante.

Lema 2.1. *Sea $m : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por $m\left(\xi\right) = 1 + 4\pi^2\xi^2$. Entonces*

1.
$$0 < c_1\left(1+|\xi|\right)^s \leq m\left(\xi\right) \leq c_2\left(1+|\xi|\right)^s. \tag{7}$$

2. $m\left(\xi\right) \in C^4\left(\mathbf{R}\right)$.

3. Existe una constante $\widetilde{C}$ tal que $\xi \mapsto m\left(\xi\right) - \widetilde{C}\,|\xi|$ es de clase $C^1\left(\mathbf{R}\right)$ para toda ξ.

4. $\frac{\xi}{m(\xi)}$ tiene sólo un número finito de puntos de inflexión, los cuales son no degenerados.

Prueba. Las tres primeras afirmaciones son obvias. Para demostrar la última pongamos

$$f(\xi) = \frac{\xi}{1 + 4\pi^2\xi^2}$$

entonces,

$$f'(\xi) = \frac{1 - 4\pi^2\xi^2}{\left(1 + 4\pi^2\xi^2\right)^2}; \text{ de donde } f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi = \pm\frac{1}{2\pi}$$

luego

$$f''(\xi) = \frac{8\pi^2\xi\left(4\pi^2\xi^2 - 3\right)}{\left(1 + 4\pi^2\xi^2\right)^3};$$

por tanto

$$f''(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi = 0, \xi = \pm\frac{\sqrt{3}}{2\pi}, \tag{8}$$

y

$$f'''(\xi) = \frac{-384\pi^6\xi^4 + 576\pi^4\xi^2 - 24\pi^2}{\left(1 + 4\pi^2\xi^2\right)^4}. \tag{9}$$

Como $f'''(\xi) \neq 0$, los puntos de inflexión son no degenerados.

El lema que sigue será usado para estimar integrales de la forma (10) en vecindades de puntos críticos.

Lema 2.2 (Van der Corput). *Sea $\rho \in C^2(\mathbf{R})$ una función cóncava o convexa sobre $[a,b]$ con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, entonces*

$$\left|\int_a^b e^{i\rho(s)} ds\right| \leq 4\left\{\min_{[a,b]} |\rho''(s)|\right\}^{-1/2} \quad \text{si } \rho''(s) \neq 0 \text{ en } [a,b]. \tag{10}$$

Lema 2.3 (W. Strauss). *Sea $g(t)$ una función de valor real continua, no negativa tal que, existen constantes positivas α, β y γ tales que*

$$g(t) \leq \alpha + \beta g^{\gamma}(t),$$

para cualquier t en un intervalo que contenga a $t = 0$, donde $\gamma > 1$. Si

$$g(0) \leq \alpha \text{ y } \alpha\beta^{(\gamma-1)^{-1}} < \left(1 - \gamma^{-1}\right)\gamma^{-(\gamma-1)^{-1}},$$

entonces, en el mismo intervalo g es acotada y $g(t) < \alpha\left(1 - \gamma^{-1}\right)$.

3 Comportamiento Asintótico de la Solución del Problema Lineal Asociado

La siguiente proposición nos será útil en la demostración del teorema 3.2

Proposición 3.1. *Sea $\gamma > 0$ dado, entonces para r suficientemente grande, la desigualdad*

$$\sup_{\alpha \in \mathbf{R}} \left| \int_{-r}^{r} e^{it\left(\frac{\xi}{1+4\pi^2\xi^2} - \alpha\xi\right)} d\xi \right| \leq C \left[t^{-\gamma} + t^{\frac{\gamma-1}{2}} + t^{-1/2} r^{\frac{s+1}{2}} \right]$$

se cumple, donde C es una constante positiva (independiente de γ y α).

Prueba Los puntos de inflexión de $f(\xi)$ son $\xi_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$, $\xi_2 = 0$ y $\xi_3 = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}$. Sea $r > 0$ un número suficientemente grande de modo que $\xi_j \in \,]-r, r[$ para $j = 1, 2, 3$. Sea $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño tal que $]\xi_j - \varepsilon, \xi_j + \varepsilon[\subseteq \,]-r, r[$ para $j = 1, 2, 3$. Consideremos el conjunto

$$B_\varepsilon = \{\xi_j \in \,]-r, r[\,: |\xi - \xi_j| \geq \varepsilon \; j = 1, 2, 3\}$$

y calculemos la integral

$$\begin{aligned} I &= \int_{-r}^{r} e^{it\left(\frac{\xi}{1+4\pi^2\xi^2} - \alpha\xi\right)} d\xi \\ &= \int_{B_\varepsilon} e^{it\left(\frac{\xi}{1+4\pi^2\xi^2} - \alpha\xi\right)} d\xi + \int_{]-r,r[\setminus B_\varepsilon} e^{it\left(\frac{\xi}{1+4\pi^2\xi^2} - \alpha\xi\right)} d\xi \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned} \tag{11}$$

Con el fin de utilizar el Lema 2.2, probaremos primero que los posibles puntos de inflexión de $h(\xi) = f(\xi) - \alpha\xi$ son los de $f(\xi)$.

En efecto, $h''(\xi) = f''(\xi)$ y como por (8) y (9) $h''(\xi) = f''(\xi) = 0$, $h'''(\xi_j) \neq 0$ para $j = 1, 2, 3$. Como $h'''(\xi_j) > 0$ para $j = 1, 3$ entonces $h'(\xi)$ tiene un mínimo local (estricto) y dado que $h'''(0) < 0$, $h'(\xi)$ tiene un máximo local (estricto). Por tanto, $h(\xi)$ es cóncava y convexa en pequeñas vecindades de ξ_j para $j = 1, 2, 3$. En el conjunto B_ε tenemos que $h''(\xi) \neq 0$. Luego podemos estimar I_1 usando el Lema 2.2 y así

$$|I_1| \leq 4 \left\{ t \min_{\xi \in B_\varepsilon} |h''(\xi)| \right\}^{-1/2} \tag{12}$$

En seguida, estimamos $h''(\xi)$ usando (10) para $f(\xi)$

$$\begin{aligned}
|h''(\xi)| &= |f''(\xi)| \\
&= \left|\frac{8\pi^2\xi\left(4\pi^2\xi^2-3\right)}{\left(1+4\pi^2\xi^2\right)^3}\right| \\
&= \left(1+4\pi^2\xi^2\right)^{-3}\left|8\pi^2\xi\left(4\pi^2\xi^2-3\right)\right| \\
&\leq \frac{\left(8\pi^2\right)^{s-1}}{\left(1+4\pi^2\xi^2\right)^3}\left(1+|\xi|\right)^{s-1}\left(1+4\pi^2\xi^2\right) \\
&\leq C\left(1+|\xi|\right)^{3s}\left(1+|\xi|\right)^{s-1}\left(1+|\xi|\right)^{s} \\
&\leq C\left(1+|\xi|\right)^{-s-1} \\
&\leq C|\xi|^{-s-1},
\end{aligned}$$

donde $C=c_1^{-3}c_2\left(8\pi^2\right)^{s-1}$. Por lo tanto

$$\min_{\xi\in B_\varepsilon}|h''(\xi)| = \min_{j=1,2,3}\left\{Cr^{-s-1}, |h''(\xi_j\pm\varepsilon)|\right\} = Cr^{-s-1} \tag{13}$$

Ahora estimamos I_2 en (11)

$$I_2=\int_{]-r,r[\setminus B_\varepsilon} e^{ith(\xi)}d\xi.$$

Cuando $t\to+\infty$ entonces, dado $\varepsilon>0$ existe t_0 tal que $t_0\geq\varepsilon^{-1/\gamma}$ para toda $t\geq t_0$. Para $t\geq t_0$ descomponemos la integral

$$\begin{aligned}
\int_{|\xi-\xi_j|<\varepsilon} e^{ith(\xi)}d\xi &= \int_{|\xi-\xi_j|<t^{-\gamma}} e^{ith(\xi)}d\xi \\
&\quad + \int_{t^{-\gamma}\leq|\xi-\xi_j|<\varepsilon} e^{ith(\xi)}d\xi \\
&= I_3+I_4
\end{aligned} \tag{14}$$

Haciendo $\xi-\xi_j=s$ en I_3 obtenemos

$$|I_3|=\left|\int_{|s|<t^{-\gamma}} e^{ith(s+\xi_j)}ds\right|\leq 2t^{-\gamma}. \tag{15}$$

Como h es cóncava y convexa, usando el Lema 2.2 estimamos I_4 como sigue

$$|I_4| \leq 4 \left\{ t \min_{t^{-\gamma} \leq |\xi - \xi_j| < \varepsilon} |h''(\xi)| \right\}^{-1/2} \tag{16}$$

En la vecindad de cada ξ_j, $j = 1, 2, 3$, la función $h''(\xi)$ tiene un desarrollo en serie de Taylor

$$h''(\xi) = h'''(\xi_j)(\xi - \xi_j) + R(\xi),$$

donde

$$R(\xi) = \frac{1}{2} h^{(4)}(\theta)(\xi - \xi_j)^2$$

para algún θ entre ξ y ξ_j. Por lo tanto, en la misma vecindad la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} \left|h''(\xi)\right| &= \left|h'''(\xi_j) + \frac{1}{2} h^{(4)}(\theta)(\xi - \xi_j)\right| |\xi - \xi_j| \\ &\geq \left[\left|h'''(\xi_j)\right| - \left|\frac{1}{2} h^{(4)}(\theta)\right| |(\xi - \xi_j)|\right] |\xi - \xi_j| \\ &\geq \left[\left|h'''(\xi_j)\right| - \delta\right] |\xi - \xi_j| \end{aligned}$$

será verdadera mientras que $\delta > 0$ sea tan pequeño conjuntamente con $\lim_{\xi \to \xi_j} \frac{R(\xi)}{\xi - \xi_j} = 0$. Tomando $0 < \delta < \min_{1 \leq j \leq 3} \left|h'''(\xi_j)\right|$ concluimos que existe una constante positiva C tal que

$$\left|h''(\xi)\right| \geq C |\xi - \xi_j|$$

para cualquier ξ "cercano" a ξ_j.

Se sigue que

$$\min_{t^{-\gamma} < |\xi - \xi_j| < \varepsilon} \left|h''(\xi)\right| \geq C t^{-\gamma} \text{ para } j = 1, 2, 3 \tag{17}$$

Combinando (17) con (16) se sigue de (14) y (11) que

$$\begin{aligned}|I| &= \left|\int_{-r}^{r} e^{ith(\xi)}d\xi\right| \\ &\leq 4\left[\frac{c_2}{c_1^3}\left(8\pi^2\right)^{s-1}\right]^{-1/2} t^{-1/2} r^{\frac{s+1}{2}} + 2t^{-\gamma} \\ &\qquad + \left(\frac{3\pi^2}{64}\right)^{-1/2} t^{\frac{\gamma-1}{2}},\end{aligned}$$

lo que prueba el Lema.

Teorema 3.2. *Sea m como en el Lema 2.1. Si $\varphi \in H^s(\mathbf{R}) \cap L^1(\mathbf{R})$ con $s \geq 2$, entonces, la solución del problema lineal*

$$\begin{cases} L\partial_x u + \partial_x u = 0, \quad x \in \mathbf{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x). \end{cases} \tag{18}$$

satisface el estimado

$$\|u(x,t)\|_\infty \leq C\left(\|\varphi\|_1 + \|\varphi\|_s\right)(1+t)^{-\frac{2s-1}{6s}}$$

para todo t suficientemente grande.

Prueba Utilizando la transformada de Fourier inversa en el espacio en (18) tenemos

$$\begin{cases} \widehat{\partial_t u}(\xi) = -\frac{i\xi}{1+4\pi^2\xi^2}\widehat{u}(\xi) \\ \widehat{u}(\xi,0) = \widehat{\varphi}(\xi), \end{cases}$$

cuya solución

$$u(\xi,t) = e^{-\frac{i\xi}{1+4\pi^2\xi^2}}\widehat{\varphi}(\xi)$$

determina la representación integral

$$u(x,t) = \int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{i\xi}{1+4\pi^2\xi^2}t+2\pi ix\xi}\widehat{\varphi}(\xi)\,d\xi. \tag{19}$$

Sea $r > 0$, el que se escogerá después, y descompongamos la integral anterior en dos de modo que

$$\begin{aligned}
|u(x,t)| &\leq \left| \int_{|\xi| \leq r} e^{-\frac{i\xi}{1+4\pi^2\xi^2}t+2\pi i x\xi} \widehat{\varphi}(\xi)\, d\xi \right| + \cdots \\
&\qquad \cdots + \left| \int_{|\xi| \geq -r} e^{-\frac{i\xi}{1+4\pi^2\xi^2}t+2\pi i x\xi} \widehat{\varphi}(\xi)\, d\xi \right| \\
&= I_1 + I_2. \qquad (20)
\end{aligned}$$

Estimamos I_2 en (20)

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq \int_{|\xi| \geq -r} |\widehat{\varphi}(\xi)|\, d\xi \\
&= \int_{|\xi| \geq -r} (1+|\xi|)^s (1+|\xi|)^{-s} |\widehat{\varphi}(\xi)|\, d\xi \qquad (21)
\end{aligned}$$

Usando la desigualdad de Hölder resulta que

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq \left(\int_{|\xi| \geq -r} (1+|\xi|)^{2s} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2\, d\xi \right)^{1/2} \\
&\qquad \left(\int_{|\xi| \geq -r} (1+|\xi|)^{-2s}\, d\xi \right)^{1/2} \\
&\leq \|\varphi\|_s \left(\int_{-\infty}^{-r} \frac{d\xi}{(1-\xi)^{2s}} + \int_{-r}^{+\infty} \frac{d\xi}{(1-\xi)^{2s}} \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\frac{2}{2s-1} \right)^{1/2} \|\varphi\|_s (1+r)^{\frac{1-2s}{2}}. \qquad (22)
\end{aligned}$$

pues

$$\int_{-\infty}^{-r} \frac{d\xi}{(1-\xi)^{2s}} \quad \text{y} \quad \int_{-r}^{+\infty} \frac{d\xi}{(1-\xi)^{2s}}$$

son convergentes y la suma de las dos integrales es $\frac{2}{2s-1}\left[\frac{r+1}{(1+r)^{2s}}\right]$.

Finalmente, estimamos I_1.

Sea

$$g(\xi,t) = e^{-\frac{i\xi t}{1+4\pi^2\xi^2}}.$$

Luego I_1 se puede escribir en la forma

$$\begin{aligned}
I_1 &= \left|\int_{|\xi|\le r} e^{2\pi i x\xi} g(\xi,t)\,\widehat{\varphi}(\xi)\,d\xi\right| \\
&= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i x\xi} h(\xi,t)\,\widehat{\varphi}(\xi)\,d\xi\right| \\
&= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i x\xi} \left(\widehat{\overset{\vee}{h}(\cdot,t) * \varphi}\right)(\xi)\,d\xi\right| \\
&= \left|\left(\overset{\vee}{h}(\cdot,t) * \varphi\right)(\xi)\right| \\
&\le \left\|\overset{\vee}{h}(\cdot,t)\right\|_{\infty} \|\varphi\|_1, \qquad (23)
\end{aligned}$$

donde $h(\xi,t) = \chi_{|\xi|\le r}\, g(\xi,t)$.

Pero

$$\begin{aligned}
\left|\overset{\vee}{h}(\cdot,t)\right| &= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i x\xi} h(\xi,t)\,d\xi\right| \\
&= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i x\xi} \chi_{|\xi|\le r}\, g(\xi,t)\,d\xi\right| \\
&= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i x\xi - \frac{i\xi t}{1+4\pi^2\xi^2}} \chi_{|\xi|\le r}\,d\xi\right| \\
&= \left|\int_{-r}^{r} e^{it\left(\alpha\xi - \frac{\xi}{1+4\pi^2\xi^2}\right)}\,d\xi\right| \\
&\le \sup_{\alpha\in\mathbf{R}} \left|\int_{-r}^{r} e^{it\left(\alpha\xi - \frac{\xi}{1+4\pi^2\xi^2}\right)}\,d\xi\right| \\
&\le C\left(t^{-\gamma} + t^{\frac{\gamma-1}{2}} + t^{-1/2} r^{\frac{s+1}{2}}\right).
\end{aligned}$$

En consecuencia, usando (23) deducimos que

$$I_1 \le C\left(t^{-\gamma} + t^{\frac{\gamma-1}{2}} + t^{-1/2} r^{\frac{s+1}{2}}\right) \|\varphi\|_1. \qquad (24)$$

De (20), (22) y (24) concluimos que

$$
\begin{aligned}
|u(x,t)| &\leq C\left(t^{-\gamma}+t^{\frac{\gamma-1}{2}}+t^{-1/2}r^{\frac{s+1}{2}}\right)\|\varphi\|_1+\cdots \\
&\quad \cdots+\left(\frac{2}{2s-1}\right)^{1/2}\|\varphi\|_s(1+r)^{\frac{1-2s}{2}} \\
&\leq C\left(\|\varphi\|_1+\|\varphi\|_s\right)\left[t^{-\gamma}+t^{\frac{\gamma-1}{2}}+t^{-1/2}r^{\frac{s+1}{2}}\right. \\
&\qquad \left.\cdots+(1+r)^{\frac{1-2s}{2}}\right]
\end{aligned}
$$

Escogemos ahora $r=t^{\frac{1}{3s}}$ y $\gamma=\frac{1}{3}$ (así, para t grande, r será bastante grande para poder aplicar el Lema 2.1). Luego

$$
\begin{aligned}
\|u(\cdot,t)\|_\infty &\leq C\left(\|\varphi\|_1+\|\varphi\|_s\right)\left[t^{-\frac{1}{3}}+t^{-\frac{1}{3}}\right. \\
&\qquad \left.\cdots+t^{-1/2}t^{\frac{1}{3s}\left(\frac{s+1}{2}\right)}\left(1+t^{\frac{1}{3s}}\right)^{\frac{1-2s}{2}}\right] \\
&\leq C\left(\|\varphi\|_1+\|\varphi\|_s\right)\left[2t^{-\frac{1}{3}}+t^{-1/2}t^{\frac{s+1}{6s}}\right. \\
&\qquad \left.\cdots+\left(1+t^{\frac{1}{3s}}\right)^{\frac{1-2s}{2}}\right] \\
&\leq C\left(\|\varphi\|_1+\|\varphi\|_s\right)\left[2t^{-\frac{1}{3}}+t^{\frac{1-2s}{6s}}\right. \\
&\qquad \left.\cdots+\left(1+t^{\frac{1}{3s}}\right)^{\frac{1-2s}{2}}\right] \\
&\leq 2C\left(\|\varphi\|_1+\|\varphi\|_s\right)\left(t^{-1/3}+t^{\frac{1-2s}{6s}}\right) \\
&\leq C\left(\|\varphi\|_1+\|\varphi\|_s\right)t^{\frac{1-2s}{6s}}. \qquad (25)
\end{aligned}
$$

Es de observar que (25) es válida para t grande, digamos para $t\geq T_0$.

Por otro lado, usando la representación (19) tenemos que

$$
\begin{aligned}
\|u(\cdot,t)\|_\infty &\leq \int_{\mathbf{R}}\left|e^{-\frac{i\xi}{1+4\pi^2\xi^2}t+2\pi ix\xi}\right|\left|\widehat{\varphi}(\xi)\right|d\xi \\
&= \int_{\mathbf{R}}\left|\widehat{\varphi}(\xi)\right|d\xi \\
&\leq c\|\varphi\|_1\leq C\left(\|\varphi\|_1+\|\varphi\|_s\right) \qquad (26)
\end{aligned}
$$

De (25) y (26) tenemos que

$$\|u(\cdot,t)\|_\infty \le C\left(\|\varphi\|_1 + \|\varphi\|_s\right)(1+t)^{-\frac{2s-1}{6s}}$$

que es lo que el teorema afirma para toda $t \ge T_0$.

Corolario 3.3. *Si $\varphi \in H^4(\mathbf{R}) \cap L^1(\mathbf{R})$, entonces la solución del problema lineal*

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2(\partial_t u) + \partial_x u = 0, & x \in \mathbf{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x). \end{cases}$$

satisface el estimado

$$\|u(\cdot,t)\|_\infty \le C\left(\|\varphi\|_1 + \|\varphi\|_4\right)(1+t)^{-\frac{1}{3}}$$

para toda t suficientemente grande.

Prueba Del teorema se tiene para I_2, con $s = 4$ que

$$I_2 \le C\|\varphi\|_4 (1+r)^{-7/2} \le C\|\varphi\|_4\, r^{-7/2},$$

pues $(1+r)^{-7/2} \le r^{-7/2}$.

Por otro lado, también del teorema

$$\begin{aligned} I_1 &\le C\left(t^{-1/3} + t^{-1/3} + t^{-1/2} r^{\frac{5}{2}}\right)\|\varphi\|_1 \\ &= C\left(2t^{-1/3} + t^{-1/2} r^{3/2}\right)\|\varphi\|_1 \\ &= C\left(2t^{-1/3} + t^{-1/2} r^{3/2}\right)\|\varphi\|_1 \\ &\le C\left(2t^{-1/3} + 2t^{-1/2} r^{3/2}\right)\|\varphi\|_1 \\ &\le C\left(t^{-1/3} + t^{-1/2} r^{3/2}\right)\|\varphi\|_1 \end{aligned} \tag{27}$$

Sumando (26) y (27) tenemos

$$
\begin{aligned}
I_1 + I_2 &\leq C\,\|\varphi\|_4\, r^{-7/2} + C\left(t^{-\frac{1}{3}} + t^{-1/2} r^{3/2}\right)\|\varphi\|_1 \\
&\leq C\,\|\varphi\|_4\, r^{-7/20} + C\left(t^{-\frac{1}{3}} + t^{-7/20}\right)\|\varphi\|_1 \\
&\leq C\left(\|\varphi\|_1 + \|\varphi\|_4\right)\left(t^{-\frac{1}{3}} + t^{-7/20}\right) \\
&\leq C\left(\|\varphi\|_1 + \|\varphi\|_4\right) t^{-\frac{1}{3}} \\
&\leq C\left(\|\varphi\|_1 + \|\varphi\|_4\right)(1+t)^{-1/3}.
\end{aligned}
$$

Observación 3.4. *El corolario anterior, fue probado por J. Albert [3], Lema 7, pág. 534.*

4 Comportamiento Asintótico de la Solución del Problema Nolineal

El lema siguiente será una herramienta importante para la prueba del resultado principal.

Lema 4.1. *Sean* $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ *tales que*

$$\alpha + \beta - \gamma \geq 1, \quad \alpha \geq \gamma \ \ o \ \ \beta \geq \gamma$$

y

$$\alpha > \gamma \ \ si \ \ \beta = 1, \quad \beta > \gamma \ \ si \ \ \alpha = 1.$$

Entonces se cumple que

$$\sup_{0 \leq t < +\infty} \int_0^t (1+t)^{\gamma}(1+t-r)^{-\alpha}(1+r)^{-\beta}\, dr < +\infty.$$

Prueba Si C denota diferentes constante que no dependen de t, entonces

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{(1+t)^\gamma (1+t-r)^{-\alpha}}{(1+r)^\beta} dr &= \int_0^{t/2} \frac{(1+t)^\gamma (1+t-r)^{-\alpha}}{(1+r)^\beta} dr \\ &+ \int_{t/2}^t \frac{(1+t)^\gamma (1+t-r)^{-\alpha}}{(1+r)^\beta} dr.\end{aligned}$$

Como $0 \leq r \leq \frac{t}{2}$ se tiene $1 < 1 + \frac{t}{2} \leq 1 + t - r \leq 1 + t$, entonces

$$1 + t \leq 2 + t \leq 2(1 + t - r) \leq 2(1 + t),$$

de donde

$$(1+t)^\alpha \leq 2^\alpha (1+t-r)^\alpha .$$

Luego

$$\frac{1}{(1+t-r)^\alpha} \leq \frac{2^\alpha}{(1+t)^\alpha},$$

por lo que

$$\int_0^{t/2} \frac{(1+t)^\gamma}{(1+r)^\beta} (1+t-r)^{-\alpha} dr \leq \frac{2^\alpha}{(1+t)^{\alpha-\gamma}} \int_0^{t/2} (1+r)^{-\beta} dr. \quad (28)$$

Además

$$\int_0^{t/2} (1+r)^{-\beta} dr = \begin{cases} \ln\left(1+\frac{t}{2}\right), & \text{si } \beta = 1 \\ \frac{1}{1-\beta}\left[\left(1+\frac{t}{2}\right)^{1-\beta} - 1\right], & \text{si } \beta \neq 1 \end{cases} \quad (29)$$

Así, en (28) cuando $\alpha > \gamma$, $\beta = 1$ tenemos

$$\int_0^{t/2} \frac{(1+t)^\gamma}{(1+r)^\beta} (1+t-r)^{-\alpha} dr \leq \frac{2^\alpha \ln\left(1+\frac{t}{2}\right)}{(1+t)^{\alpha-\gamma}} \leq C \quad (30)$$

debido a que

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{t}{2}\right)}{(1+t)^{\alpha-\gamma}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{2(\alpha-\gamma)(1+t)^{\alpha-\gamma-1}\left(1+\frac{t}{2}\right)} = 0.$$

También, en (28) $\alpha+\beta-\gamma\geq 1, \alpha\geq\gamma$ o $\beta\geq\gamma$ y $\beta\neq 1$ tenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^{t/2}\frac{(1+t)^{\gamma}}{(1+r)^{\beta}}(1+t-r)^{-\alpha}\,dr &\leq \frac{2^{\alpha}\left[\left(1+\frac{t}{2}\right)^{1-\beta}-1\right]}{(1+t)^{\alpha-\gamma}(1-\beta)}\\
&\leq \frac{2^{\alpha}(1+t)^{1-\beta}}{(1-\beta)(1+t)^{\alpha-\gamma}}\\
&\leq \frac{2^{\alpha}}{(1-\beta)(1+t)^{\alpha+\beta-\gamma-1}}\\
&\leq C, \qquad (31)
\end{aligned}$$

ya que

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{(1+t)^{\alpha+\beta-\gamma-1}}=0.$$

Análogamente, podemos concluir que

$$\int_{t/2}^{t}\frac{(1+t)^{\gamma}}{(1+r)^{\beta}}(1+t-r)^{-\alpha}\,dr\leq\frac{2^{\beta}}{(1+t)^{\beta-\gamma}}\int_{t/2}^{t}(1+t-r)^{-\alpha}\,dr$$

pues $\frac{t}{2}\leq r\leq t\Rightarrow 1+\frac{t}{2}\leq 1+r\leq 1+t\Rightarrow 1+t\leq 2+t\leq 2(1+r)\leq 2(1+t)$, de donde

$$(1+r)^{-\beta}\leq 2^{\beta}(1+t)^{-\beta}.$$

Luego, cambiando la variable $s=t-r$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_{t/2}^{t}\frac{(1+t)^{\gamma}}{(1+r)^{\beta}}(1+t-r)^{-\alpha}\,dr &\leq \frac{2^{\beta}}{(1+t)^{\beta-\gamma}}\int_0^{t/2}(1+s)^{-\alpha}\,ds\\
&\leq C
\end{aligned}$$

porque $\beta>\gamma$ si $\alpha=1$ y $\beta\geq\gamma$ y $\alpha+\beta-\gamma\geq 1$.

Estamos listos para probar el resultado principal.

Teorema 4.2. *Sea $\varphi\in H^{s}(\mathbf{R})\cap L^{1}(\mathbf{R})$ con $s\geq 2$ y m con las condiciones del Lema 2.1. Sean $a(t)$ una función de valor real continua acotada y $u=u(x,t)$ solución del problema no lineal*

$$\begin{cases} L\partial_t u+\partial_x u+a(t)\,u^{p}\partial_x u=0, & x\in\mathbf{R},\ t>0\\ u(x,0)=\varphi(x), \end{cases} \qquad (32)$$

con p es un entero tal que $p > \frac{6s}{r(2s-1)} + 1$ y $b \in L^{r_1}(\mathbf{R}^+)$ donde $\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} = 1$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que si $\|\varphi\|_1 + \|\varphi\|_s \leq \delta$, entonces, la solución u satisface

$$\|u(\cdot,t)\|_\infty \leq C(1+t)^{-\frac{2s-1}{6s}},$$

para todo t suficientemente grande.

Prueba del Teorema

Sea $u = u(x,t)$ la solución global del problema (32). Sabemos que u se puede escribir como la solución de la ecuación integral

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_{\mathbf{R}} e^{2\pi i x\xi - \frac{it\xi}{1+4\pi^2\xi^2}} \widehat{\varphi}(\xi)\, d\xi \\ &\quad + \frac{1}{p+1} \int_0^t \int_{\mathbf{R}} \Big[e^{2\pi i x\xi - \frac{i\xi}{1+4\pi^2\xi^2}(t-\mu)} \\ &\qquad \widehat{Mu^{p+1}}(\xi, r)\, a(r)\, d\xi d\mu \Big] \end{aligned}$$

y como $\widehat{Mu^{p+1}}(\xi) = (-L^{-1}\widehat{\partial_z u^{p+1}})(\xi) = -\widehat{l}(\xi)(\widehat{\partial_x u^{p+1}})(\xi)$, entonces

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_{\mathbf{R}} e^{2\pi i x\xi - \frac{it\xi}{1+4\pi^2\xi^2}} \widehat{\varphi}(\xi)\, d\xi \\ &\quad + \frac{1}{p+1} \int_0^t \int_{\mathbf{R}} e^{2\pi i x\xi - \frac{i\xi}{1+4\pi^2\xi^2}(t-\mu)} \\ &\qquad \Big[-\widehat{l}(\xi)(\widehat{\partial_x u^{p+1}})(\xi) \Big] a(r)\, d\xi d\mu \end{aligned} \tag{33}$$

y como $(\widehat{\partial_x u^{p+1}})(\xi) = (p+1)(\widehat{u^p \partial_x u})(\xi)$, (33) puede escribirse como

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_{\mathbf{R}} e^{2\pi i x\xi - \frac{it\xi}{1+4\pi^2\xi^2}} \widehat{\varphi}(\xi)\, d\xi \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbf{R}} e^{2\pi i x\xi - \frac{i\xi}{1+4\pi^2\xi^2}(t-\mu)} \\ &\qquad \Big[-\widehat{l}(\xi)(\widehat{u^p \partial_x u})(\xi) \Big] a(r)\, d\xi d\mu \end{aligned}$$

o de otra manera,

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \int_{\mathbf{R}} e^{2\pi i x\xi - \frac{it\xi}{1+4\pi^2\xi^2}} \widehat{\varphi}(\xi)\, d\xi \\
&\quad + \int_0^t \int_{\mathbf{R}} e^{2\pi i x\xi - \frac{i\xi}{1+4\pi^2\xi^2}(t-\mu)} \frac{\widehat{h}(\xi,\mu)}{1+4\pi^2\xi^2} d\xi d\mu \qquad (34)
\end{aligned}
$$

donde $\frac{\widehat{h}(\xi,\mu)}{1+4\pi^2\xi^2} = \widehat{l}(\xi)\,\widehat{h}(\xi,t)$ y $L^{-1}\psi = l(x) * \psi(x)$ como antes.

Aquí, $h(x,t) = -a(t)\, u^p \partial_x u$. Obviamente $h(\cdot,t) \in L^2(\mathbf{R})$ para cada $t \geq 0$. De hecho

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}} |h(x,t)|^2\, dx &= \int_{\mathbf{R}} a^2(t)\, |u|^{2p} |\partial_x u|^2\, dx \\
&\leq a^2(t) \left(\int_{\mathbf{R}} e^{2\pi i x\xi} |u|^{2p}\, dx \right) \\
&\qquad \left(\int_{\mathbf{R}} e^{-2\pi i x\xi} |\partial_x u|^2\, dx \right) \\
&\leq a^2(t) \, \|u(\cdot,t)\|_\infty^{2p} \|\partial_x u(\cdot,t)\|_2^2 .
\end{aligned}
$$

Para concluir la demostración necesitamos la siguiente:

Proposición 4.3. *Sean m, φ, u y a como en el teorema. Definamos, para toda $t \geq 0$, la función g dada por*

$$
g(t) = \sup_{0 \leq \mu \leq t} \left[\|u(\cdot,\mu)\|_\infty (1+t)^{\frac{2s-1}{6s}} + \|u(\cdot,\mu)\|_s \right].
$$

Entonces que existe una constante C positiva tal que

$$
g(t) \leq C\left(\|\varphi\|_s + \|\varphi\|_1\right) + C g^{p+1}(t). \qquad (35)
$$

Prueba

De hecho, usando el teorema 3.2 y observando que

$$
\widehat{v}(\xi) = e^{-\frac{i\xi}{1+4\pi^2\xi^2}(t-\mu)} \left(l * \widehat{u^p \partial_x u a}(t)\right)(\xi)
$$

es la solución de

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{1+4\pi^2\xi^2}\widehat{\partial_x v}\,(\xi)+i\xi\widehat{v}\,(\xi)\,a\,(t)=0\\ \\ \widehat{v}\,(\xi,\mu)=\left(l*\widehat{u^p\partial_x u a}\,(t)\right)(\xi)\,,\end{array}\right. \tag{36}$$

entonces se sigue de (34) que

$$\begin{aligned}|u\,(x,t)| \;\leq\; & C\left(\|\varphi\|_s+\|\varphi\|_1\right)_\infty (1+t)^{-\frac{2s-1}{6s}}\\ & +c\int_0^t \left[\left\|l*\widehat{u^p\partial_x u}\right\|_1+\left\|l*\widehat{u^p\partial_x u}\right\|_s\right]\\ & \qquad (1+t-\mu)^{-\frac{2s-1}{6s}}\,|a\,(\mu)|\,d\mu \end{aligned}\tag{37}$$

mientras que $l*u^p\partial_x u\in L^1(\mathbf{R})\cap H^s(\mathbf{R})$. Pero, esto último se verifica fácilmente pues usando el Lema 2.2 y la desigualdad de Hölder obtenemos que

$$\begin{aligned}\|l*u^p\partial_x u\|_1 &\leq \|l\|_\infty\,\|u\,(\cdot,\mu)\|_\infty^{2p}\,\|u\,(\cdot,\mu)\|_2\,\|\partial_x u\,(\cdot,\mu)\|_2\\ &\leq \|l\|_\infty\,\|u\,(\cdot,\mu)\|_\infty^{p-1}\,\|u\,(\cdot,\mu)\|_s^2\end{aligned}\tag{38}$$

y

$$\begin{aligned}\|l*u^p\partial_x u\|_s^2 &\leq \int_{\mathbf{R}}\left(1+\xi^2\right)^s|l*u^p\partial_x u|\,d\xi\\ &= \int_{\mathbf{R}}\left(1+\xi^2\right)^s\left(1+4\pi^2\xi^2\right)^{-2}|u^p\partial_x u|\,d\xi\\ &\leq c_1^{-2}\int_{\mathbf{R}}|u^p\partial_x u|^2\,d\xi\\ &= c_1^{-2}\int_{\mathbf{R}}u^{2p}\left(\partial_x u\right)^2 d\xi\\ &\leq c_1^{-2}\left(\int_{\mathbf{R}}u^{2p}dx\right)\left(\int_{\mathbf{R}}\left(\partial_x u\right)^2dx\right)\\ &\leq c_1^{-2}\,\|u\,(\cdot,\mu)\|_\infty^{2p}\,\|\partial_x u\,(\cdot,\mu)\|_2^2\end{aligned}$$

ó

$$\begin{aligned}\|l*u^p\partial_x u\|_s &\leq c_1^{-1}\,\|u\,(\cdot,\mu)\|_\infty^{p}\,\|\partial_x u\,(\cdot,\mu)\|_2\\ &\leq C\,\|u\,(\cdot,\mu)\|_\infty^{p-1}\,\|u\,(\cdot,\mu)\|_s^2\end{aligned}\tag{39}$$

De la definición de $g(t)$, (38) y (39) obtenemos que

$$\|l * u^p \partial_x u\|_1 \leq \|l\|_\infty g^{p+1}(t)(1+t)^{\frac{2s-1}{6s}(1-p)} \tag{40}$$

y

$$\|l * u^p \partial_x u\|_s \leq C g^{p+1}(t)(1+t)^{\frac{2s-1}{6s}(1-p)} \tag{41}$$

Usando (40), (41) con (37) concluimos que

$$\begin{aligned} \|u(\cdot,t)\|_\infty &\leq C\left(\|\varphi\|_s + \|\varphi\|_1\right)_\infty (1+t)^{-\frac{2s-1}{6s}} \\ &+ C g^{p+1}(t) \int_0^t (1+t-\mu)^{-\frac{2s-1}{6s}} \\ &\qquad (1+\mu)^{-\frac{2s-1}{6s}(1-p)} |a(\mu)|\, d\mu \end{aligned} \tag{42}$$

En la última integral de (42) usamos la desigualdad de Hölder para obtener

$$\begin{aligned} \|u(\cdot,t)\|_\infty &\leq C\left(\|\varphi\|_s + \|\varphi\|_1\right)_\infty (1+t)^{-\frac{2s-1}{6s}} \\ &+ C g^{p+1}(t) \left(\int_0^t (1+t-\mu)^{-\left(\frac{2s-1}{6s}\right)r} \right. \\ &\qquad \left. (1+\mu)^{-\frac{2s-1}{6s}(1-p)r}\, d\mu\right)^{1/r} \\ &\qquad \left(\int_0^t |a(\mu)|^{r_1}\, d\mu\right)^{1/r_1} \end{aligned}$$

Ahora usamos el Lema 4.1 con

$$\alpha = \frac{2s-1}{6s} r = \gamma, \quad \beta = \left(\frac{2s-1}{6s}\right)(p-1)\, r$$

para deducir que

$$\begin{aligned} \|u(\cdot,t)\|_\infty &\leq C\left(\|\varphi\|_s + \|\varphi\|_1\right)_\infty (1+t)^{-\frac{2s-1}{6s}} \\ &+ C g^{p+1}(t)(1+t)^{-\frac{2s-1}{6s}} \left(\int_0^\infty |at|^{r_1 d\mu}\right)^{1/r_1} \end{aligned}$$

En consecuencia

$$(1+t)^{\frac{2s-1}{6s}}\left\|u(\cdot,t)\right\|_{\infty}\leq C\left(\left\|\varphi\right\|_{s}+\left\|\varphi\right\|_{1}\right)+Cg^{p+1}(t) \tag{43}$$

Análogamente, usando (34) obtenemos

$$\left\|u(\cdot,t)\right\|_{s}\leq\left\|\varphi\right\|_{s}+\int_{0}^{t}\left\|l*u^{p}\partial_{x}u\right\|_{s}\left|a(\mu)\right|d\mu$$

y de (41) se sigue que

$$\begin{aligned}
\left\|u(\cdot,t)\right\|_{s} &\leq \left\|\varphi\right\|_{s}+Cg^{p+1}(t)\int_{0}^{t}(1+\mu)^{\frac{2s-1}{6s}(1-p)}\left|a(\mu)\right|d\mu\\
&\leq \left\|\varphi\right\|_{s}+Cg^{p+1}(t)\left(\int_{0}^{\infty}(1+\mu)^{\frac{2s-1}{6s}(1-p)r}d\mu\right)^{1/r}\\
&\qquad\left(\int_{o}^{\infty}\left|a(\mu)\right|^{r_{1}}d\mu\right)^{1/r_{1}}\\
&\leq \left\|\varphi\right\|_{s}+Cg^{p+1}(t)\,.
\end{aligned} \tag{44}$$

Ahora, (43) y (44) prueban (35).

Finalmente, verificamos que se cumple el Lema de Strauss. En efecto,

$$g(0)=\left\|\varphi\right\|_{\infty}+\left\|\varphi\right\|_{s}\leq 2\left\|\varphi\right\|_{s}+\left\|\varphi\right\|_{1}\leq 2\left(\left\|\varphi\right\|_{1}+\left\|\varphi\right\|_{s}\right).$$

Luego, tomando $\alpha=2\left(\left\|\varphi\right\|_{\infty}+\left\|\varphi\right\|_{s}\right)$, $\beta=C$ (la constante positiva), $\gamma=p+1$ y $\delta=\dfrac{p}{2C(p+1)^{\frac{p+1}{p}}}$ entonces se cumple el Lema, lo cual implica la conclusión del teorema, pues

$$\begin{aligned}
(1+t)^{\frac{2s-1}{6s}}\left\|u(\cdot,t)\right\|_{\infty} &\leq g(t)\\
&\leq 2\left(\left\|\varphi\right\|_{\infty}+\left\|\varphi\right\|_{s}\right)\left[1-(p+1)^{-1}\right]\\
&= C.
\end{aligned}$$

Referencias

[1] ADAMS, R. (1975). *Sobolev spaces.* Academic Press. New York, San Francisco, London.

[2] ALBERT, J. (1986). *Dispersion of low energy waves for the generalized Benjamin-Bona-Mahony equation.* J. Differential Equations **63**, 117-134.

[3] ALBERT, J. (1989). *On the decay of solutions of the generalized Benjamin-Bona-Mahony equation.* J. Math. Anal. and Appl. **141**, 527-537.

[4] BENJAMIN, T.- BONA J.- MAHONY J. (1972). *Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems.* Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A **272**, 47-78.

[5] BONA, J. - SMITH, R. (1975). *The initial-value problem for the Korteweg-de Vries equation.* Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A **278**, 555-601.

[6] BRÉZIS, H. (1983). *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.* Masson, Paris.

[7] FOLLAND, G. (1976). *Introduction to partial differential equations.* Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

[8] FOLLAND, G. (1984). *Real analysis. Modern technics and their applications.* Jhon Wiley & Sons, New York.

[9] IÓRIO R.-NUNES WAGNER. *Introdução às Equações de Evolução não Lineares.* 18^0 Coloquio Brasileiro de Matemática. Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro.

[10] MONTEALEGRE, J. (1995). *La ecuación de Benjamin-Bona-Mahony generalizada. Existencia de Soluciones.* Pro Mathematica.

[11] MONTEALEGRE, J.-PETROZZI, S. (1999). *Semigrupos de contracción y ecuaciones de evolución lineales.* Reporte de investigación.

[12] MONTEALEGRE, J.-PETROZZI, S. (1998). *Operadores disipativos maximales.* Reporte de investigación.

[13] Murray, J. (1984). *Asymptotic Analysis.* Springer-Verlag, New York Inc.

[14] Racke, R. (1992). *Lectures on nonlinear evolutions equations. Initial value problems.* Aspects of mathematics: E, Vol. 19.

[15] Showalter, R. E. (1979). *Hilbert space methods of partial differential equations.* Pitman Publishing Limited. London.

[16] Stein, E. - Weiss, G. (1971). *Introduction to Fuorier analysis on euclidean spaces.* Princeton University Press.

[17] Zygmund, A. (1968). *Trigonometric series.* Cambridge University Press, Cambridge.

Carlos Rodríguez Fernández
Sección Matemáticas. Departamento de Ciencias
Pontificia Universidad Católica del Perú
cjrodrig@pucp.edu.pe