Pro Mathematica Vol. XVI, Nos. 31-32, 2002

AUTOMORFISMO DE FOLIACIONES HOLOMORFAS SOBRE SUPERFICIES RACIONALES

Percy ***Fernández Sánchez***

Resumen

En este trabajo clasificamos las foliaciones holomorfas con grupo de automorfismo infinito sobre una superficie racional. Como consecuencia de este resultado probamos que el grupo de automorfismo de una foliación de tipo general con singularidades sobre una superficie racional es finito.

IMCA-PUCP.

1 Introducción

Schwarz probó que el grupo de automorfismos de una superficie de Riemann con género mayor que 2 es finito. Andreotti, en [1], generaliza este resultado probando que el grupo de bimeromorfismos de una variedad algebraica de tipo general es finito, los cuales, son análogos a las superficies de Riemann de género mayor que 2. En el caso de superficies algebraicas se tiene inclusive una cota para este número, vea [14].

En este trabajo primero clasificamos las foliaciones holomorfas con singularidades sobre las superficies racionales.

Teorema A. *Sea $\mathcal{F}$ una foliación sobre una superficie racional M. Si $\#\mathrm{Aut}(\mathcal{F}) = +\infty$, entonces, $\mathcal{F}$ es bimeromorfa a una foliación de Riccati o a una fibración racional.*

Luego probamos un resultado análogo al de Andreotti para foliaciones holomorfas sobre superficies racionales (superficies bimeromorfas al plano proyectivo).

Teorema B. *El grupo de automorfismos de las foliaciones holomorfas de tipo general, con singularidades sobre una superficie racional es finito.*

2 Preliminares

Para la nociones básicas de foliaciones holomorfas recomendamos ver los libros [4], [13] y [2]. Una foliación holomorfa $\mathcal{F}$ con singularidades aisladas sobre una superficie algebraica M puede ser definida por una familia de campos vectoriales holomorfos $\{X_i\}$ definido sobre un cubrimiento abierto $\{U_i\}$ de M satisfaciendo la condición de cociclo $X_i = g_{ij}X_j$ cuando $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, donde $\{g_{ij}\}$ son funciones holomorfas nunca nulas definidas sobre $U_i \cap U_j$. En este caso, $\{g_{ij}\}$ define un fibrado lineal $T^*_{\mathcal{G}}$ sobre M llamado *fibrado cotangente* o *canónico*. El conjunto de singularidades $\mathrm{Sing}(\mathcal{G})$ de $\mathcal{G}$ es definido como $\mathrm{Sing}(\mathcal{G})/_{U_i} = \{X_i = 0\}$ y siempre es posible suponer $\dim(\mathrm{Sing}(\mathcal{G})) = 0$.

Sea $\mathcal{F}$ una foliación holomorfa sobre una superficie compleja M. Consideremos una curva compacta C sobre M. Tome $p \in C$ y sea

$\{f = 0\}$ una ecuación local reducida de C alrededor de p. Suponga que $\mathcal{F}$ es representado en una vecindad coordenada $(U, (x, y))$ de $p = (0, 0)$, por la 1-forma holomorfa

$$\omega = a(x, y)dx + b(x, y)dy.$$

Cuando C no es $\mathcal{F}$-invariante, definamos la *tangencia* entre $\mathcal{F}$ y C en p por $\operatorname{tang}_p(\mathcal{F}, C) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_p}{I}$, donde I es el ideal generado por f y $-b\frac{\partial f}{\partial x} + a\frac{\partial f}{\partial y}$. Definimos $\operatorname{tang}(\mathcal{F}, C) = \sum_{p \in C} \operatorname{tang}_p(\mathcal{F}, C)$. Es probado en [2] que

$$T^*_{\mathcal{F}}.C = \operatorname{tang}(\mathcal{F}, C) - C^2.$$

Ejemplo 1. Si $M = \mathbb{C}P(2)$ y C es una linea no $\mathcal{F}$-invariante tenemos

$$T^*_{\mathcal{F}} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}P(2)}(\operatorname{tang}(\mathcal{F}, C) - 1).$$

Ahora, suponga que, C es $\mathcal{F}$-invariante entonces $\omega \wedge df = f\Theta$, donde Θ es una 2-forma holomorfa. Entonces, existe dos funciones holomorfas g, h relativamente primos definidos sobre U y una 1-forma holomorfa η tal que

$$g\omega = hdf + f\eta.$$

Definimos, el *Índice de Camacho-Sad* por $CS_p(\mathcal{F}, C) = \frac{-1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\eta}{h}$, donde γ es un lazo alrededor de p sobre $\{f = 0\}$ y $CS(\mathcal{F}, C) = \sum_{p \in \operatorname{Sing}\mathcal{F} \cap C} CS_p(\mathcal{F}, C)$. El *Teorema del Índice de Camacho-Sad* [5] dice que:

$$CS(\mathcal{F}, C) = C^2.$$

Recordemos que una *foliación reducida* $\mathcal{F}$ es una foliación tal que toda singularidad p es reducida en el sentido de Seidenberg, esto es, para todo campo vectorial X generando $\mathcal{F}$ y todo punto singular p de X, los eigenvalores de la parte lineal de X no son ambos ceros y su cociente, cuando es definida, no es un número racional positivo. Si un autovalor es cero y el otro no, la singularidad recibe el nombre de *silla nudo*.

Definición 1. Sea $\mathcal{F}$ una foliación sobre la superficie compleja S, y $\mathcal{G}$ cualquier foliación reducida bimeromorficamente equivalente a $\mathcal{F}$. La *dimensión de Kodaira* de $\mathcal{F}$ es dado por

$$\operatorname{kod}(\mathcal{F}) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log h^0(S, K_{\mathcal{G}}^{\otimes=n})}{\log n}.$$

El concepto de la dimensión de Kodaira para foliaciones holomorfas fue introducida independientemente por L. G. Mendes y M. McQuillan, vea [2], [12] y [11].

Fue probado que la dimensión de Kodaira es bien definida y es un invariante bimeromorfo de $\mathcal{F}$, ver [12].

Cuando la foliación tiene dimensión Kodaira 2, decimos que, la foliación es de *tipo general*. Esta terminología es justificada pues existe una clasificación parcial de las foliaciones de dimensión de Kodaira menor a 2 . Para más detalles vea [11] y [2].

Una *fibración* en M sobre una superficie de Riemann compacta B es un mapeo holomorfo sobreyectivo $f : M \to B$. Una fibra *genérica* de f es la pre-imagen de un valor regular de f. Si todas las fibras genéricas son conexas la fibración f es llamada *conexa*. Si todas las fibras son curvas racionales la fibración f es llamada fibración *racional*.

Una foliación $\mathcal{F}$ en M es llamada foliación de *Riccati* si existe una fibración racional cuyas fibras son transversales a $\mathcal{F}$.

En [12] se prueba que foliaciones de Riccati y fibraciones racionales tienen dimensión a lo mas 1.

El *grupo bimeromorfismo (automorfismo)* de la foliación $\mathcal{F}$ es subgrupo maximal de los bimeromorfismos (automorfismos) de M que dejan invariante la foliación.

En el caso de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ una foliación $\mathcal{F}$ puede ser definida en coordenadas afines $z = 1$ por una 1-forma $\omega = Adx + Bdy$ donde A, B son polinomios complejos en dos variables. En este caso se puede verificar que

Proposición 1. *El grupo de automorfismo de una foliación holomorfa sobre $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ es un grupo de Lie. Por lo tanto, es un conjunto cuasiproyectivo, luego, tiene un número finito de componentes conexas.*

Prueba. Por definición $\mathrm{Aut}(\mathcal{F})$ es el conjunto de elementos g en $\mathrm{PGL}(3,\mathbb{C})$ que deja invariante a $\mathcal{F}$. Ahora, si $\mathcal{F}$ es dado por una 1-forma homogénea $\omega = \sum P_i dx_i$ entonces, por definición ω y $g^*\omega$ definen la misma foliación, esto es, ellos son linealmente dependientes. Así, $\mathrm{Aut}(\mathcal{F}) = \mathbb{P}(\{g \in \mathrm{GL}(3,\mathbb{C}) : g^*\omega \wedge \omega = 0\})$, donde $\mathbb{P}(A)$ significa la proyectivización de A. Es claro que, $\mathrm{Aut}(\mathcal{F})$ es un grupo de Lie. Como $\mathrm{GL}(3,\mathbb{C})$ es cuasiproyectivo la prueba esta completa. □

Ejemplo 2. Suponga que una foliación $\mathcal{F}$ es definida sobre $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ por la 1-forma $\omega = P(x,y)dx + (Q(x,y) - yP(x,y))dy$ donde $P, Q \in \mathbb{C}[x + \frac{1}{2\alpha}y - \frac{1}{2}y^2]$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Esas foliaciones son invariantes por $T(x,y) = (x+\frac{1}{\alpha}y, y+\frac{1}{\alpha})$. Así, $\mathrm{Aut}(\mathcal{F})$ contiene infinitos elementos de $\{T^n : n \in \mathbb{Z}\}$. Puesto que, el flujo de $X = (y - \frac{1}{2\alpha})\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$,

$$X_t(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2\alpha}t \\ t \end{pmatrix},$$

satisface $X_t^*\omega = \omega$. Obtenemos que, X_t pertenece al algebra de Lie de $\mathrm{Aut}(\mathcal{F})$. Observe que, $X_{\frac{1}{\alpha}} = T$.

El siguiente resultado muestra que este ejemplo es general.

Corolario 1. *Si* $\mathrm{Aut}(\mathcal{F})$ *tiene un número infinito de elementos entonces la dimensión de* $\mathrm{Aut}(\mathcal{F})$ *no es cero.*

Prueba. Suponga por el absurdo que $\dim(\mathrm{Aut}(\mathcal{F})) = 0$, entonces por la proposición 1, $\mathrm{Aut}(\mathcal{F})$ tiene solo un número finito de elementos, contradiciendo la hipótesis □

Para obtener un campo vectorial holomorfo en el algebra de Lie de $\mathrm{Aut}(\mathcal{F})$, como en el ejemplo 2, nosotros aplicamos el teorema de Martinelli-Bochner [10] que dice: El grupo de automorfismo de una variedad compleja compacta es un grupo de Lie y su algebra de Lie está formada por campos holomorfos globales definidas en la variedad.

3 Automorfismos de Foliaciones Holomorfas sobre el Plano Proyectivo

Teorema 1. *Sea $\mathcal{F}$ una foliación holomorfa en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Si $\#\mathrm{Aut}(\mathcal{F}) = +\infty$, entonces en un adecuado sistema coordenado afín, $\mathcal{F}$ es inducida por una de las siguientes 1-formas:*

1. $\omega = Pdx + (Q - yP)dy$, *donde* $P, Q \in \mathbb{C}[x - \frac{y^2}{2}]$;

2. $\omega = yp(y)dx + (xp(y) - q(y))dy$, *donde* $p, q \in \mathbb{C}[t]$;

3. $\omega = yp(\frac{y^m}{x^n})dx + xq(\frac{y^m}{x^n})dy$, *o* $\mathcal{F}$ *es lineal.*

Prueba: Recuérdese que el grupo de automorfismos de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ es isomorfo a $PSL(3,\mathbb{C})$. Puesto que, $\#\mathrm{Aut}(\mathcal{F}) = +\infty$ podemos obtener del Corolario de la Proposición 1 que $\mathrm{Aut}(\mathcal{F})$ es un subgrupo algebraico lineal de $PSL(3,\mathbb{C})$. En particular, $\mathrm{Aut}(\mathcal{F})$ tiene un algebra de Lie no trivial, luego, por el Teorema de Martinelli-Bochner, existe un campo vectorial global X sobre $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ cuyo flujo esta en $\mathrm{Aut}(\mathcal{F})$.

Cualquier campo holomorfo global sobre $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ puede ser representado en coordenadas homogéneas (x, y, z), en la forma

$$X(x, y, z) = M \cdot (x, y, z)^t ,$$

donde $M \in gl(\mathbb{C}, 3)$. Analizando las posibles formas canónicas de Jordan tenemos esencialmente tres distintos casos.

Primero, suponga que, la forma canónica de Jordan de M es

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{C}^* .$$

En este caso, la acción ϕ_t inducida por X puede ser escrita en el plano afín $\{z = 1\}$ como

$$\phi_t(x, y) = (x + ty + \frac{t^2}{2}, y + t).$$

Por consiguiente, las orbitas de X son curvas racionales y X admite una integral primera racional $x - \frac{y^2}{2}$. Si $\mathcal{F}$ es definida por la 1-forma $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ entonces $\phi_t^*\omega = \lambda(t)\omega$. Así, $\lambda \equiv 1$ y

$$\begin{cases} P = P \circ \phi_t \\ Q = tP \circ \phi_t + Q \circ \phi_t, \end{cases}$$

Por consiguiente, $\omega = Pdx + (R - yP)dy$, donde $P = P \circ \phi_t$ y $R = R \circ \phi_t$. En otras palabras, P y R son integrales para la foliación definida por X. Como, $x - \frac{y^2}{2}$ es también una integral primera y sus fibras son conexas, se tiene del teorema de factorización de Stein [8] que $P, R \in \mathbb{C}[x - \frac{y^2}{2}]$.

Ahora considere M de la forma

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{C}^* .$$

Aquí la acción inducida ϕ_t, en las coordenadas afines $\{z = 1\}$, es

$$\phi_t(x,y) = e^{t(\alpha-\beta)}(x + ty, y).$$

Como en los casos previos, $\mathcal{F}$ en $\{z = 1\}$ es definida por $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$. Ya que, $\phi_t^*\omega = \lambda(t)\omega$, obtenemos

$$\lambda(t)P(x,y) = e^{t(\alpha-\beta)}P \circ \phi_t \, ; \tag{1}$$

$$\lambda(t)Q(x,y) = e^{t(\alpha-\beta)}\left(Q \circ \phi_t + tP \circ \phi_t\right) . \tag{2}$$

Escribiendo $P(x,y)$ como una suma de sus componentes homogéneas, $P(x,y) = \sum_j P_j(x,y)$. Desde (1) deducimos que si $P_j(x,y)$ no es cero, entonces, $\lambda(t) = e^{t(\alpha-\beta)(j+1)}$. Comparando otra vez con (1) obtenemos que $P_j(x,y) = P_j(x + ty, y)$. Esto implica que, P_j no depende de x, esto es, $P(x,y) = p_j y^j$. Usando un argumento similar con $Q(x,y)$ podemos obtener que, $Q(x,y) = -p_j x y^{j-1} + q_j y^j$. Por lo tanto, la 1-forma ω puede ser escrita como

$$\omega = yp(y)dx + (q(y) - xp(y))dy \, .$$

El caso restante es cuando M es diagonalizable, es decir,

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}^* .$$

Como en los casos anteriores podemos escoger un sistema coordenado afín adecuado en el cual la foliación $\mathcal{F}$ es descrita por $\omega = Pdx + Qdy$ y la acción ϕ_t inducida por X es de la forma

$$\phi_t(x,y) = (e^{t(\alpha-\gamma)}x, e^{t(\beta-\gamma)}y)\,.$$

Procediendo como antes obtenemos las siguientes relaciones

$$\lambda(t)P(x,y) \;=\; e^{t(\alpha-\gamma)}P(\phi_t(x,y))\,; \tag{3}$$

$$\lambda(t)Q(x,y) \;=\; e^{t(\beta-\gamma)}Q(\phi_t(x,y))\,. \tag{4}$$

Si escribimos $P(x,y) = \sum_{i,j} p_{ij}x^iy^j$ y $Q(x,y) = \sum_{i,j} q_{ij}x^iy^j$, entonces podemos deducir de (3) las relaciones

$$\lambda(t) = e^{t(\alpha-\gamma)(i+1)+t(\beta-\gamma)j} \text{ si } p_{ij} \neq 0; \tag{5}$$

$$\lambda(t) = e^{t(\alpha-\gamma)i+t(\beta-\gamma)(j+1)} \text{ si } q_{ij} \neq 0\,. \tag{6}$$

Observe que, X admite una integral primera racional, si y solo si, $\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma} = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$.

Suponga que, X tiene integral primera racional y considere el grupo

$$G = \{(l,k) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} : e^{t(\alpha-\gamma)l} = e^{t(\beta-\gamma)k}, \text{ para todo } t \in \mathbb{C}\}\,.$$

Como G es cíclico y generado por (n,m). Sea $(l_0,k_0) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ tal que $\lambda(t) = e^{t(\alpha-\gamma)l_0+t(\beta-\gamma)k_0}$, entonces

$$\omega = x^{l_0}y^{k_0}(yp(\frac{y^m}{x^n})dx + xq(\frac{y^m}{x^n})dy).$$

Finalmente, asuma que $\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma} \notin \mathbb{Q}$. Por lo tanto, existe $t_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $e^{t_0(\alpha-\gamma)n} \neq e^{t_0(\beta-\gamma)m}$, para todo par de enteros n y m, no ambos ceros. Se tiene de esto que existe un único par de enteros k y l tal que $\lambda(t_0) = e^{t_0(\alpha-\gamma)l+t_0(\beta-\gamma)k}$. Por consiguiente de (3), concluimos que, $P(x,y) = p_{lk}x^{l-1}y^k$ y $Q(x,y) = q_{lk}x^ly^{k-1}$. Así,

$$\omega = x^{l-1}y^{k-1}\,(p_{lk}ydx + q_{lk}xdy)$$

y claramente, $\mathcal{F}$ es una foliación lineal. $\square$

Corolario 2. *Sea $\mathcal{F}$ una foliación holomorfa definida en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Suponga que*

$$\#\mathrm{Aut}(\mathcal{F}) = +\infty .$$

Entonces, $\mathcal{F}$ es birracionalmente equivalente a una foliación de Riccati.

Prueba. De la prueba del teorema anterior tenemos que la foliación definida por X no tiene integral primera racional, entonces, $\mathcal{F}$ es lineal. En particular $\mathcal{F}$ es una foliación de Riccati después de una explosión.

Ahora, suponga que, la foliación $\mathcal{G}$ definida por X tiene integral primera, es decir, es un pencil de curvas racionales. Sea $\sigma : M \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ la resolución minima de $\mathcal{G}$. Como explotamos puntos singulares de X obtenemos un campo holomorfo de vectores de $\tilde{X}$ definido en todo M que pertenece al algebra de Lie de $\mathrm{Aut}(\sigma^*(\mathcal{F}))$.

Por consiguiente, el lugar geométrico de las tangencias de $\sigma^*\mathcal{F}$ y $\tilde{X}$ debe ser invariante por $\sigma^*\mathcal{F}$, para los detalles vea [6] y [7]. Ya que, $\sigma^*\mathcal{G}$ es una fibración racional nosotros obtenemos que, $\sigma^*\mathcal{F}$ es una foliación de Riccati. $\square$

Proposición 2. *Sea $\mathcal{F}$ una foliación holomorfa de tipo general sobre una superficie compleja compacta M. Entonces,* $\mathrm{Aut}(\mathcal{F})$ *es isomorfo a un grupo algebraico lineal.*

Prueba. Como $\mathcal{F}$ es de tipo general para un entero m suficientemente grande, el m-ésimo mapeo pluricanónico ϕ_m es un bimeromorfismo M y la clausura de su imagen, denotado por N.

Observe que, el grupo $\mathrm{Aut}(\mathcal{F})$ actúa naturalmente sobre el proyectivizado de $H^0(M, K_{\mathcal{F}}^{\otimes m})$. Si σ es una sección de $K_{\mathcal{F}}^{\otimes m}$ y α es un automorfismo de $\mathcal{F}$, entonces, la acción es dada por $\alpha(\sigma) = \alpha^*\sigma$.

Siendo ϕ_m un bimeromorfismo entre M y N, la acción definida induce un monomorfismo de grupos

$$\psi : \mathrm{Aut}(\mathcal{F}) \to PSL(k, \mathbb{C}) ,$$

donde $k = \dim_{\mathbb{C}} H^0(M, K_{\mathcal{F}}^{\otimes m}) - 1$.

Observemos que, la imagen de ψ es precisamente el automorfismo de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{k-1}$ dejando N y $\mathcal{G}$ invariante, nosotros podemos concluir que $\mathrm{Aut}(\mathcal{F}) \cong \mathrm{Aut}(\mathcal{G})$ es un subgrupo algebraico lineal de $PSL(k, \mathbb{C})$. $\square$

En la prueba de nuestro resultado principal seguimos de cerca los argumentos de Brunella en [2]. Pag. 86-88.

Prueba del Teorema A. Si $\#\mathrm{Aut}\,(\mathcal{F}) = +\infty$ de la Proposición 2 tenemos que, $dim\mathrm{Aut}(\mathcal{F}) > 0$ y por el Teorema de Martinelli-Bochner tenemos un campo vectorial holomorfo X que determina una foliación holomorfa $\mathcal{G}$. Como en una superficie racional existe un número finito de curvas excepcionales estas tienen que ser invariante por X. Luego, podemos suponer que M es minimal después de efectuar algunas contracciones. Si M no es $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, entonces, es una superficie de Hirzebruch Σ_n. Primero probaremos que, hay una singularidad de la foliación $\mathcal{G}$ fuera de la curva racional Γ_n, donde Γ_n es la única curva sobre Σ_n con la propiedad $\Gamma^2 = -n$. Por consiguiente, es invariante por el flujo de X y puede suceder:

1. $X|_{\Gamma_n} = 0$ si hay una fibra F (de una fibración racional de M sobre Γ_n) no invariante tenemos $\mathrm{tang}(\mathcal{G}, F) > 0$. Como $\mathcal{G}$ solo tiene divisores de cero $T_{\mathcal{G}}.F \geq 0$, por otro lado $T_{\mathcal{G}}.F = F^2 - \mathrm{tang}(\mathcal{G}, F) = -\mathrm{tang}(\mathcal{G}, F) < 0$. Así, F es invariante por $\mathcal{G}$, y por lo tanto, X es tangente a una fibración racional. Como $\mathrm{tang}(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ es invariante por $\mathcal{F}$ y X, vea [6]; se tiene que es una fibración racional o una foliación de Riccati.

2. $X|_{\Gamma_n} \neq 0$, así, X tiene más de dos ceros sobre Γ_n, y por el argumento empleado en el caso anterior, las fibras que pasan por estos puntos son $\mathcal{G}$-invariantes. Además, por el índice de Poincare-Hopf de $X|_{\Gamma_n}$ coincide con la multiplicidad de ceros de $X|_{\Gamma_n}$. Así, tenemos 2 casos

   (a) Hay dos fibras $\mathcal{G}$-invariantes y no existe singularidad fuera de Γ_n, entonces, ambas singularidades sobre Γ_n son sillas-nudos y por el Teorema del índice $\Gamma_n^2 = 0$, contradicción.

   (b) Si hay sólo una fibra $\mathcal{G}$-invariante F, entonces, la multiplicidad de $X/_{\Gamma_n}$ en el punto singular es dos. Ahora, si X no tiene singularidades sobre F fuera de Γ_n, entonces, $X/_F$ tiene multiplicidad dos. Entonces, otra vez por el Teorema del índice $\Gamma_n^2 = 0$, lo cual es un absurdo.

Resumiendo, tenemos una fibra F y un punto $p \in F$ tal que $X(p) = 0$ y $p \notin \Gamma_n$. Haciendo un blow-up en p y un blow-down en la transformada estricta de F llegamos a Σ_{n-1}. Siendo X aún holomorfa pues hacemos blow-up en singularidades de X y contraemos curvas invariantes por el. Siguiendo este procedimiento reducimos nuestro problema a $\Sigma_1 = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ y en este caso $X = X_1 \oplus X_2$, donde X_i es un campo vectorial holomorfo sobre $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

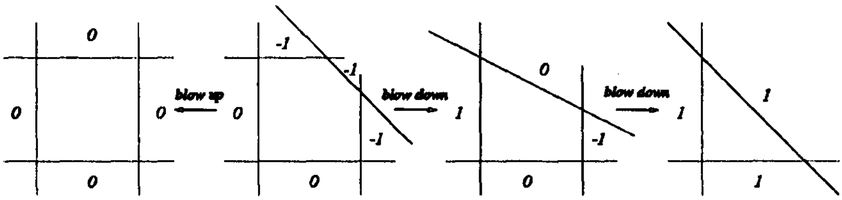

Figura 1 *Bimeromorfismo entre* $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ *y* $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

De aquí se tiene que luego de un blow-up y dos blow-downs llegamos a $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, ver figura 1; aún siendo X campo vectorial holomorfo. Para terminar aplicamos el Corolario 2. $\square$

Prueba del Teorema B. Del Teorema 3.3.1 en [12] tenemos que las foliaciones de Riccati y fibraciones racionales tienen dimensión de Kodaira menor que 2. Entonces del Teorema A tenemos que, si una foliación es del tipo general su grupo de automorfismo tiene que ser finito $\square$

4 Comentario Final

Este resultado que probamos en este articulo para superficies racionales es válido para cualquier superficie compleja, vea [6] y [7]. En este último articulo se prueba además algunos resultados en dimensión mayor a dos, sobre la caracterización de foliaciones con grupo de automorfismo infinitos que sean algebraicos lineales. Algunas preguntas que surgen naturalmente como: ¿Cuál es la cota óptima para grupo $\mathrm{Aut}(\mathcal{F})$ de una foliación de tipo general?, aún no fueron resueltas por causa de la dificultades que aparecen. Esta pregunta es relevante, pues, la única foliación con grupo de automorfismo conocido es la foliación de Jouanoulo, ver [9].

5 Agradecimientos

Este articulo es un resumen de una parte de mi tesis de doc torado [6] que fue hecho bajo la dirección del profesor Cesar Camacho y un articulo en coautoria con Jorge Pereira a quienes agradezco por los multiples comentarios y sugerencias.

Referencias

[1] ANDREOTTI, A. (1950). *Sopra le superficie che possegono transformazioni birazionali in se.* Red. Mat. e Appl. **9**, 255–279.

[2] BRUNELLA, M. (2000). *Birational Geometry of Foliations.* First Latin American Congress of Mathematicians, IMPA.

[3] BRUNELLA, M. (1999). *Minimal models of foliated algebraic surfaces.* Bull. SMF **127**, 289-305.

[4] CAMACHO, C. AND LINS NETO, A. *Theory Geometric of Foliations.* Birkhäser.

[5] CAMACHO, C. AND SAD, P. (1982). *Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields.* Math. Ann. 282, 177-184.

[6] FERNANDEZ, P. (2001). *Automorphism Groups of Holomorphic Foliations.* Tese de Doutorado IMPA.

[7] FERNANDEZ, P. AND PEREIRA, J., por aparecer en *Comunications in Analysis and Geometry.*

[8] GRAUERT, H. AND REMMERT, R. (1984). *Coherent Analytic Sheaves.* Springer Verlarg.

[9] JOUANOLOU, J. P. (1977). *Equation de pfaff algébriques.* LNM 708, Springer-Verlag.

[10] KOBAYASHI. (1972). *Transformations Groups in Differential Geometry.* Springer–Verlag.

[11] McQuillan, M. (2000). *Non-Commutative Mori Theory.* Preprint, IHES.

[12] Mendes, L.G. (2000). *Kodaira dimension of holomorphic singular foliations.* Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática, 31, 127-143.

[13] Lins Neto, A. and Scardua, B. (1997). *Folheações Algebricas Complexas.* 24 Coloquio Brasileiro de Matemática IMPA.

[14] Xiau, G. (1994). *Bound of automorfismo of surfaces of general type.* Annals of Mathematics 139, 51-77.

Percy Fernández
Instituto de Matemática y Ciencias Afines, IMCA
Pontificia Universidad Católica del Perú, PUCP
pefernandez@uni.edu.pe