

IDENTIDADES CON POLINOMIOS DE LAGUERRE

Francisco De Zela

Resumen

Se presenta la deducción de una regla de suma para polinomios de Laguerre, obtenida mediante métodos de la mecánica cuántica. Dichos métodos se presentan en forma sucinta, de acuerdo a la aplicación que de ellos se hace en el presente trabajo.

1 Introducción

El propósito de este trabajo es el de ilustrar cómo, al aplicar los métodos de cálculo de la mecánica cuántica, se puede obtener identidades matemáticas útiles e interesantes. Con esto no queremos decir que los métodos de la mecánica cuántica sean los más apropiados para este fin. Lo que se intenta es solamente ilustrar la medida en que dichos métodos de cálculo podrían aplicarse con ventaja, por parte de quienes tuvieran por objetivo la búsqueda de nuevas identidades.

Recientemente, Daboul [1] presentó la siguiente identidad para polinomios de Laguerre:

$$e^{\lambda z} L_n \left(-\frac{(1-\lambda)^2 z}{\lambda} \right) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{z}{\lambda} \right)^{n-k} \frac{k!}{n!} \left(L_k^{(n-k)}(z) \right)^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} (\lambda z)^{k-n} \frac{n!}{k!} \left(L_n^{(k-n)}(z) \right)^2, \quad (1)$$

la cual a su vez generaliza otra identidad previamente reportada [2], y a la que se reduce la anterior cuando se pone $\lambda = -1$.

La ecuación (1) se obtiene a partir de considerar los elementos de matriz de ciertos operadores, utilizando diferentes bases del espacio de Hilbert en el cual dichos operadores son definidos. Nuestro propósito es, como dijimos antes, el de ilustrar cómo es que usando técnicas de la física puede llegarse a obtener identidades matemáticas interesantes o eventualmente útiles. En lo que sigue, introduciremos algunas nociones básicas de la mecánica cuántica, más con el objetivo de fijar la notación, que con el fin de resumir en pocas líneas los elementos básicos de las herramientas de trabajo usualmente empleadas en ella.

2 Algunas Cuestiones Preliminares

Sin pretensión de rigor, podemos decir que en un “estado cuántico” se encierra toda la información que es potencialmente obtenible acerca de un sistema físico. Matemáticamente, el estado cuántico se representa mediante un vector de un espacio \mathcal{E} de Hilbert. Para representar al vector

se utiliza la llamada “notación de Dirac”: $|\psi\rangle$. En este vector, o “ket” - como también se le llama - ψ representa cualquier etiqueta que nos permita identificar inequívocamente el vector al cual nos referimos. De otro lado, $\langle\varphi|$ denota un elemento - un vector - del espacio \mathcal{E}^* , dual a \mathcal{E} . Los elementos de \mathcal{E}^* se denominan “bra’s”, en razón de que el producto interno de un “bra” y un “ket” produce un “bracket”: $\langle\varphi|\psi\rangle$. En el espacio \mathcal{E} se definen además operadores lineales $O : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, los cuales sirven para representar las llamadas “cantidades dinámicas”, tales como energía, impulso lineal, impulso angular, etc., que tienen algún efecto sobre los estados cuánticos, modificándolos de una forma u otra. Así por ejemplo, la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = H |\psi(t)\rangle, \quad (2)$$

en la cual H es el operador llamado Hamiltoniano (del sistema físico considerado), describe la evolución del estado cuántico $|\psi(t)\rangle$. Evolución que está entonces regida por un Hamiltoniano que encierra toda la información acerca de las diversas cantidades dinámicas que afectan al estado $|\psi(t)\rangle$ y que determinan su cambio en el tiempo. Dado el estado inicial, $|\psi(t=0)\rangle$, la ecuación de Schrödinger permite determinar unívocamente el estado cuántico del sistema tratado, a un tiempo posterior t , siempre y cuando no se haya producido alguna medición entre 0 y t . La medición perturba el estado cuántico de una manera esencialmente estocástica o aleatoria, la cual no puede ser encapsulada en una ecuación dinámica que la describa, aún cuando sí es posible pronosticar con precisión la *probabilidad* que corresponde a cada uno de los posibles resultados de la medición.

De otro lado, hay casos en los que resulta necesario considerar un elemento aleatorio adicional, el cual está asociado *no* a la naturaleza misma del fenómeno cuántico, sino más bien a la imprecisión de la información con la que contamos; imprecisión que puede ser debida a nuestras limitaciones experimentales, o bien a que se está considerando un sistema con un número muy grande de constituyentes y no interesa describirlos uno por uno, sino más bien en conjunto. En casos así, el elemento matemático que encierra la información sobre el estado del sistema ya no es un vector, un “ket”, sino el llamado “operador densidad” ρ . En su forma más simple, éste tiene la forma $\rho = |\psi\rangle \langle\psi|$. Que se trata de

una adecuada representación de un operador en \mathcal{E} , es algo que se ve a partir de la forma práctica de aplicarlo a un vector $|\varphi\rangle$: el resultado es otro vector, $\rho|\varphi\rangle = |\psi\rangle\langle\psi|\varphi\rangle$, en este caso un vector proporcional a $|\psi\rangle$. La forma más general de ρ será en cambio $\rho = \sum_{i,j} \rho_{i,j} |\psi_i\rangle\langle\psi_j|$, donde los $|\psi_i\rangle$ forman una base de \mathcal{E} .

Un caso importante, el cual consideraremos en lo que sigue, es el de un sistema en equilibrio térmico a la temperatura T . El operador densidad que lo describe viene dado por

$$\rho = \frac{1}{Z} \exp\left(\frac{-H}{kT}\right), \quad (3)$$

siendo H el Hamiltoniano, k la constante de Boltzmann, y $Z = \text{Tr}(\rho)$, la llamada función partición.

3 El Oscilador Armónico y el Operador Desplazamiento

Uno de los casos centrales en la física en general, sea clásica o cuántica, es el de una partícula sujeta a la acción de una fuerza elástica, proporcional al desplazamiento sufrido por la partícula respecto de su posición de equilibrio. El Hamiltoniano que describe esa situación está dado por

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2, \quad (4)$$

donde m es la masa de la partícula y k la constante elástica de la fuerza. Si usamos este Hamiltoniano en la ecuación de Schrödinger, con p y x previamente reinterpretados como operadores en \mathcal{E} , se puede resolver analíticamente la ecuación resultante. La ecuación de Schrödinger con frecuencia se encuentra escrita en la forma

$$i\hbar \frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = \left(\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}kx^2 \right) \psi(x,t). \quad (5)$$

Esta forma se obtiene de multiplicar la ecuación (2) por el bra $\langle x|$ y considerar que $\psi(x,t) \equiv \langle x|\psi(t)\rangle$ y $p = -i\hbar\partial_x$ en la base de autovectores $|x\rangle$ del operador posición: $X|x\rangle = x|x\rangle$. La solución de la forma

$\psi(x, t) = \exp[-iEt/\hbar]\varphi(x)$, llamada estacionaria, lleva a la ecuación de autovalores

$$\left(\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}kx^2\right)\varphi(x) = E\varphi(x). \quad (6)$$

Los autovalores E se obtienen (ver, p. ej. [5]) de exigir que la solución $\varphi(x)$ sea continua, lo mismo que su derivada, así como de cuadrado integrable. Esto lleva a concluir, luego de un análisis relativamente laborioso, que los autovalores están dados por

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (7)$$

con $\omega = \sqrt{k/m}$, la frecuencia angular clásica de oscilación de una masa m sujeta por un resorte de constante elástica k . También se encuentra, como parte del cálculo, que las correspondientes soluciones (funciones propias) $\varphi_n(x)$ están dadas en términos de los polinomios de Hermite.

Alternativamente, se puede emplear un método puramente algebraico [5, 6] para resolver el problema de autovalores, en vez de pasar por la solución de una ecuación diferencial. Para ello, se introducen los operadores “creación” a^+ y “destrucción” a :

$$a^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - i\frac{p}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \quad (8)$$

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + i\frac{p}{\sqrt{2m\hbar\omega}}, \quad (9)$$

en función de los cuales el Hamiltoniano toma la forma

$$H = \hbar\omega\left(a^+a + \frac{1}{2}\right) \quad (10)$$

Trabajando con una base del espacio de Hilbert constituida por los autovectores $|n\rangle$ de a^+a que cumplen

$$a^+ |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad (11)$$

$$a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \quad (12)$$

$$a^+ a |n\rangle = n |n\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

$$\langle n|m\rangle = \delta_{n,m} \quad (14)$$

se obtiene inmediatamente los autovalores E_n de H arriba mostrados.

Como se ve, los autovectores están normalizados y son ortogonales entre sí: $\delta_{m,n}$ denota la delta de Kronecker.

Si bien el operador a no es autoadjunto ($a \neq a^+$), es fácil encontrar sus autovectores y autovalores. La ecuación $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, se satisface para todos los números complejos α , tomando para (el estado normalizado) $|\alpha\rangle$

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (15)$$

La consideración de estos estados, llamados “coherentes” [7], da pie a la introducción del “operador desplazamiento”:

$$D(\alpha) = \exp(\alpha a^+ - \alpha^* a) \quad (16)$$

Se puede demostrar, aplicando técnicas desarrolladas para reordenar productos de operadores [8], que se cumple

$$D(\alpha) = \exp(\alpha a^+) \exp(-\alpha^* a) \exp(-|\alpha|^2/2) \quad (17)$$

$$D(\alpha) = \exp(-\alpha^* a) \exp(\alpha a^+) \exp(+|\alpha|^2/2) \quad (18)$$

Las técnicas mencionadas se apoyan en las propiedades algebraicas de los operadores a y a^+ , las que a su vez se resumen en

$$[a, a^+] \equiv aa^+ - a^+a = 1 \quad (19)$$

Se demuestra, de otro lado, que se puede obtener el estado coherente $|\alpha\rangle$ aplicándole al estado de “nula excitación”, al “vacío” $|0\rangle$, el operador $D(\alpha)$:

$$D(\alpha) |0\rangle = |\alpha\rangle. \quad (20)$$

El operador $D(\alpha)$ tiene una serie de propiedades, algunas de las cuales son relevantes para lo que acá nos interesa. Propiedades a las que simplemente haremos referencia, sin reproducir su demostración, por razones de espacio. Una de ellas es el resultado de aplicar $D(\alpha)$ ya no al vacío $|n=0\rangle$, sino a un estado de mayor "excitación" $|n\rangle$, con $n \neq 0$. El resultado es que las componentes de $D(\alpha) |n\rangle$ en la base de los "estados número" $\{|m\rangle, m=0, 1, 2, \dots\}$ vienen dadas por [9]:

$$\langle k | D(\alpha) | n \rangle = \sqrt{\frac{k!}{n!}} e^{-|\alpha|^2/2} (-\alpha)^{n-k} L_k^{n-k}(|\alpha|^2), \quad n > k \quad (21)$$

$$= \sqrt{\frac{n!}{k!}} e^{-|\alpha|^2/2} (\alpha)^{k-n} L_n^{k-n}(|\alpha|^2), \quad k > n \quad (22)$$

resultado éste que se obtiene a partir de considerar que, puesto que $|n\rangle = (a^+)^n |0\rangle / \sqrt{n!}$, junto con la ecuación (17) y la regla $\exp(xa)f(a, a^+) = f(a, a^+ + x)\exp(xa)$, puede llegarse a la siguiente expresión:

$$D(\alpha) |n\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha a^+} e^{-\alpha^+ a} (a^+)^n |0\rangle / n! = \frac{e^{-|\alpha|^2/2}}{\sqrt{n!}} e^{\alpha a^+} (a^+ - \alpha)^n |0\rangle \quad (23)$$

Todo lo que está a la izquierda de $|0\rangle$ en la última fórmula puede manejarse como si se tratara de una función de una variable compleja, dado que el operador a^+ conmuta consigo mismo (y con las variables numéricas). Teniendo en cuenta entonces la función generatriz de los polinomios de Laguerre

$$(1+t)^k e^{-xt} = \sum_{m=0}^{\infty} L_m^{k-m}(x) t^m \quad (24)$$

se llega a la expresión

$$D(\alpha) |k\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{\frac{m!}{k!}} (-\alpha)^{k-m} L_m^{k-m}(|\alpha|^2) |m\rangle, \quad (25)$$

de donde se deducen inmediatamente las relaciones reportadas arriba (21).

4 El Estado Térmico Desplazado

Considerando el caso particular del Hamiltoniano correspondiente a un oscilador armónico, $H = \hbar\omega(a^\dagger a + 1/2)$, el estado térmico, que definimos para un H arbitrario en la ecuación (3), viene descrito por el operador densidad

$$\rho_t = (1 - e^{-\beta}) \exp(-\beta a^\dagger a), \quad (26)$$

el cual, introduciendo el parámetro τ mediante

$$\tau = \frac{e^\beta + 1}{e^\beta - 1} = \coth\left(\frac{\beta}{2}\right) \quad (27)$$

y usando la base de los estados número, puede desarrollarse como

$$\rho_t = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(\tau) |n\rangle \langle n|, \text{ con } p_n(\tau) = \frac{2}{\tau + 1} \left(\frac{\tau - 1}{\tau + 1}\right)^n \quad (28)$$

El estado térmico desplazado lo obtenemos a partir de la transformación

$$\rho = D(\alpha)\rho_t D^\dagger(\alpha) \quad (29)$$

Las componentes de este ρ en la base de los estados números serán así

$$\rho_{mn} = \sum_{k=0}^{\infty} \langle m| D(\alpha) |k\rangle p_k(\tau) \langle k| D^\dagger(\alpha) |n\rangle \quad (30)$$

Reemplazando acá las expresiones correspondientes de $\langle k| D^\dagger(\alpha) |n\rangle$, etc., se obtiene

$$\rho_{mn} = e^{-|\alpha|^2} \frac{\alpha^{m+n}}{\sqrt{m!n!}} \sum_{k=0}^{\infty} (k!) |\alpha|^{-2k} \left(\frac{2}{\tau + 1} \left(\frac{\tau - 1}{\tau + 1}\right)^k\right) L_k^{m-k}(|\alpha|^2) L_k^{n-k}(|\alpha|^2) \quad (31)$$

donde se ha usado la relación

$$L_m^{k-m}(|\alpha|^2) = (-|\alpha|^2)^{m-k} L_k^{m-k}(|\alpha|^2) \quad (32)$$

De otro lado, se puede calcular ρ_{mn} por un método alternativo [3], obteniéndose el resultado

$$\rho_{mn} = \sqrt{\frac{n!}{m!}} \exp\left(\frac{-2|\alpha|^2}{\tau+1}\right) (2\alpha)^{m-n} \frac{2(\tau-1)^n}{(\tau+1)^{m+1}} L_n^{m-n}\left(\frac{-4|\alpha|^2}{\tau^2-1}\right) \quad (33)$$

Basta ahora comparar nuestros dos resultados, asumiendo que $\alpha \in R$ e introduciendo por conveniencia el parametro

$$\lambda = \frac{\tau-1}{\tau+1}, \quad (34)$$

para obtener, luego de un poco de álgebra y en términos de $z = |\alpha|^2$, la relación

$$e^{\lambda z} L_n^{m-n}\left(\frac{-(1-\lambda)^2 z}{\lambda}\right) = (1-\lambda)^{n-m} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\lambda}\right)^{n-k} \frac{k!}{n!} L_k^{m-k}(z) L_k^{n-k}(z), \quad (35)$$

relación ésta que generaliza la de Daboul, y a la cual se reduce para el caso $m = n$, como fácilmente puede comprobarse.

5 Conclusiones

Se ha obtenido una regla de suma para polinomios de Laguerre, la cual generaliza la regla recientemente reportada en [1]. Reglas de este tipo resultan particularmente útiles en ciertos casos donde es necesario hacer cálculos analíticos con el fin de compararlos luego con cálculos numéricos. Estos últimos son normalmente producto de un algoritmo desarrollado para ser aplicado en situaciones donde no se dispone de un resultado analítico. Se puede así verificar si el algoritmo numérico funciona correctamente, así como el grado de exactitud que tiene. Cuando el resultado analítico se escribe en términos de sumas con infinitos

términos, si bien la expresión puede considerarse “analítica” desde el punto de vista matemático, su utilización para los fines arriba mencionados involucra hacer un truncamiento en el cálculo, necesario para llevar a cabo la comparación con el algoritmo puramente numérico. Se debe entonces tomar un número suficientemente grande de términos en la suma, para que el error por truncamiento no exceda al que resulta propio del algoritmo numérico en sí. Esto se puede evitar, al contarse con un resultado como el mostrado en este trabajo, el mismo que permite reemplazar la suma por una expresión única. Aparte de la ventaja ganada en la exactitud del cálculo, es obvio que el tiempo de cómputo se verá en general considerablemente reducido.

Se ha intentado también presentar suscintamente algunos resultados de la mecánica cuántica, en especial aquéllos que últimamente se han venido obteniendo bajo el impulso y en el contexto de la óptica cuántica [7, 10]. En el marco de esta área de la física se ha desarrollado, en los últimos años, una serie de técnicas matemáticas de uso general, muy útiles cuando hay que manejar operadores en un espacio de Hilbert. El punto de partida de lo que hoy denominamos óptica cuántica puede situarse, más o menos precisamente, alrededor de los años sesenta [11], cuando se construyen los primeros láseres. Desde entonces a la fecha, se ha abierto una serie de posibilidades para la realización experimental de estados físicos netamente cuánticos, que en años anteriores era posible considerar solamente en forma teórica.

Referencias

- [1] DABOUL, J. NASA/CP-1998. p.199
- [2] BENEDICT, M. G., MARCHIOLLI, M. A. AND MIZRAHI, S. S. (1995). *J. of Physics A* **28**, 4623.
- [3] MARIAN, P. AND MARIAN, T. A. (1993). *Phys. Rev. A* **47**, 4474.
- [4] ERDÉLYI, A., MAGNUS, W., OBERHETTINGER, F. AND TRICOMI, F. G. (1953). *Higher Transcendental Functions*. McGraw-Hill, New York.
- [5] SCHIFF, L. I. (1968). *Quantum Mechanics*. McGraw-Hill, New York.

- [6] COHEN-TANNOUJDI, C., DIU, B. AND LALOË, F. (1977). *Quantum Mechanics*. John Wiley & Sons, New York.
- [7] SCULLY, M. O. AND ZUBAIRY, M. S. (1997). *Quantum Optics*. Cambridge University Press.
- [8] BARNETT, S. M. AND RADMORE, P. M. (1997). *Methods in Theoretical Quantum Optics*. Clarendon Press, Oxford.
- [9] CRISP, M. D. (1992). *Phys. Rev. A* **46**, 4138.
- [10] MEYSTRE, P. SARGENT III, M. (1991). *Elements of Quantum Optics*. Springer-Verlag, Berlin.
- [11] SARGENT III, M., SCULLY, M.O. AND LAMB, W. E., JR. (1974) *Laser Physics*. Addison-Wesley.

Francisco De Zela
Sección Física. Departamento de Ciencias
Pontificia Universidad Católica del Perú.
fdezela@fisica.pucp.edu.pe