

LA MATEMÁTICA EN LA MÚSICA*

Emilio Lluis-Puebla

**Conferencia ofrecida en la Facultad de Matemática de la Universidad de San Marcos, Lima, Perú. (Noviembre 15 del 2000), por invitación de la Sociedad Matemática Peruana.*

Resumen

Se presenta el Juego de dados musical de Mozart K. 294 (Anh.C) y se analizan matemáticamente algunas de sus características. Se expone la Teoría de la Estética de George David Birkhoff y su aplicación a la Música en particular. Se presentan las sucesiones de Fibonacci, la razón áurea o proporción divina y su aplicación en la música de Bela Bartok. Se menciona el trabajo actual de la Teoría Matemática de la Música de G. Mazzola. Finalmente se exponen algunos pensamientos en torno a la Cultura y la relación entre la Matemática y la Música.

Es común escuchar que “hay Matemática en la Música porque cuando se abre una partitura está llena de numeritos”, es decir, de los números del compás y las digitaciones. Obviamente esta observación es muy simple. Se dice que hay Matemática en la Música, que la Música y la Matemática están muy relacionadas. Pero ¿hay Matemática en la Música? ¿están relacionadas? ¿Qué relación existe entre la Música y la Matemática? Deseo exponerles algunas reflexiones acerca de esta pregunta e ilustrarlas con algunos ejemplos acerca de lo que algunos artistas o científicos han hecho al respecto durante la historia de la Humanidad.

Leibniz describe a la Música como “un ejercicio inconsciente en la Aritmética”. Esta afirmación quizás se podría justificar sobre la base de que el músico intérprete cuenta los tiempos del compás cuando comienza a estudiar una obra pero después de un tiempo de tocarla, ya no está contando conscientemente sino que deja fluir la magia de la Música. Sin embargo casi todos los “elementos externos” de la Música se definen numéricamente: 12 notas por octava; compás de $3/4$, $7/8$, ...; 5 líneas en el pentagrama; n decibeles; semitono de raíz duodécima de dos; altura de 440 *hz*; lo horizontal y lo vertical en la textura musical; arriba y abajo en la escala; etc. En la Edad Media la Música estaba agrupada con la Aritmética, la Geometría y la Astronomía en el Cuadrivio. Matemáticas un poco más elevadas se utilizaron en el cálculo de intervalos, el cual requería el uso de logaritmos, y los problemas del temperamento requerían del uso de fracciones continuas.

Es prácticamente desconocida la aplicación de algunos conceptos matemáticos a los “aspectos internos” de la Música como son el análisis, los aspectos estéticos, la estructura musical y la teoría formal de la Música. A continuación veamos cómo algunos matemáticos y músicos han aplicado conceptos matemáticos en la Música.

Mozart, en 1777, a los escasos 21 años de edad, escribió un “Juego de Dados Musical K. 294 (Anh. C) para escribir vales con la ayuda de dos dados sin ser músico ni saber nada de composición”. Escribió 176 compases adecuadamente y los puso en dos tablas de 88 elementos cada una. El juego comienza lanzando los dos dados, de tal manera que tenemos 11 números posibles (del 2 al 12) y hacemos 8 tiradas obteniendo distintos compases excepto los de la última columna que son iguales (éstos últimos con dos posibilidades: una para la repetición y otra para continuar con la segunda tabla. La segunda tabla es igual a la primera excepto que

tiene otros 88 compases con los de la última columna idénticos. Así, mediante un simple cálculo, utilizando conceptos del Álgebra Superior, se tienen 11^{14} vales diferentes, es decir, aproximadamente $3.797498335832 (10^{14})$ vales diferentes. Si se toca cada vals, con repetición de la primera parte, en 30 segundos, se requerirían de $30(11^{14})$ segundos, es decir, de aproximadamente $1.139249501(10^{16})$ segundos, o sea, 131,857,581,105 días aproximadamente, o bien 361,253,646 años aproximadamente en tocarlos todos uno tras de otro ininterrumpidamente. Es decir, un estreno mundial de una obra de Mozart cada 30 segundos a lo largo de ¡361 millones de años! (Recuérdese que la antigua edad de piedra comenzó hace unos 35,000 años). Mozart era un aficionado a la matemática y su enorme talento se mostró una vez más. Con este jueguito tan sencillo ¡dejó la imposibilidad de que intérprete alguno pudiera tocar su obra completa o de que alguna compañía de discos la grabara!

Aún más, nos muestra qué poca idea tenemos de los números grandes como $30(11^{14})$. Existieron y existen compositores que creen que ya todo está agotado con la armonía tradicional, y que por lo tanto hay que buscar un nuevo estilo de música. (Mozart, para este juego solamente utilizó 176 compases).

En 1924 George David Birkhoff (1884-1944) (miembro honorario de la Sociedad Matemática Mexicana) retoma unas ideas que había tenido años atrás pero que no desarrolló por dedicarse exclusivamente a estudios puramente matemáticos. Pensó que la melodía dependía del orden de las notas escuchadas por el oído. Le pareció que podrían establecerse unas relaciones de orden, guardadas por las notas, y así poder escoger las mejores melodías. Para él, *el problema fundamental de la Estética* era el de determinar, para una clase de objetos, las características específicas de las cuales depende el valor estético.

Birkhoff considera que hay tres fases consecutivas para la experiencia estética: primero, un esfuerzo preliminar de atención, el cual es necesario para percibir el objeto y que es proporcional a la *complejidad* C del objeto; segundo, una sensación placentera o *medida estética* M la cual recompensa este esfuerzo preliminar; y tercero, una certificación de que el objeto posee una armonía, simetría u *orden* O el cual parece una condición necesaria, si no es que suficiente, para la experiencia estética.

Así, Birkhoff propone la fórmula $M = O/C$ mediante la cual expresa la medida estética como el efecto de la densidad de las relaciones de orden comparadas con la complejidad.

El mismo inquiere lo atrevido de esta fórmula y proporciona algunas justificaciones históricas. La Estética trata del placer estético y con los objetos que lo producen. Así es que tenemos clases de objetos los cuales pueden ser comparados con respecto a su valor estético (los de clases diferentes no pueden ser comparados). Luego, el problema fundamental de la *Estética Analítica* es el de determinar los factores estéticos y su importancia relativa.

Percibir un objeto estético requiere de ciertos ajustes y la sensación de esfuerzo o tensión que acompaña siempre a la percepción aparece como la suma de las tensiones a los diversos ajustes automáticos. Así, si A, B, C, \dots representan estos ajustes, cada uno con tensiones a, b, c, \dots y si éstas se realizan r, s, t, \dots veces podemos considerar la suma $C = ra + sb + tc + \dots$ como la complejidad.

Por otro lado, el orden O corresponde a ciertas asociaciones que intervienen en el acto de percepción. Por ejemplo, la simetría sería una asociación. Si L, M, N, \dots son asociaciones de varios tipos, cada una con índices de sensación l, m, n, \dots las cuales ocurren u, v, w, \dots veces, entonces podemos considerar el total de sensaciones (positivo o negativo) $O = ul + vm + wn + \dots$ como el orden del objeto. Así, la estimación intuitiva de la cantidad de orden O inherente al objeto estético, comparado con su complejidad C , nos proporciona su medida estética.

Obviamente esta teoría matemática solo puede aplicarse a objetos cuyos factores estéticos sean esencialmente matemáticos o formales. Hay otros factores que están más allá de esta teoría, como por ejemplo, las asociaciones acerca del significado de un poema hermoso.

Veamos cómo algunos pensadores han percibido la presencia de elementos matemáticos en el arte. A diferencia de las teorías hedonísticas, místicas o moralistas, la teoría analítica se concentra en proveer una solución cuantitativa al problema fundamental antes formulado. Parecería que la Estética, si ha de considerarse científica debe de abordarse en una forma analítica y restringirse a aspectos formales del arte. Sin embargo, no se pretende negar la importancia trascendente del aspecto connotativo en todo arte creativo.

Platón reconoce la importancia del elemento matemático. Dice que si a cualquier arte se le quita la aritmética, la medida, y lo pesable, lo que queda no es mucho. También expresa que a través de la medida y la proporción siempre se llega a la belleza y a la excelencia.

Aristóteles expresa que están equivocados aquellos que claman que la Matemática no dice nada acerca de la belleza y la bondad, y que los elementos de la belleza son el orden, la simetría, la limitación definida y que éstas son las propiedades a las cuales la Matemática les pone atención.

El punto de vista de la filosofía griega estaba inclinado a seleccionar la forma y la proporción como los elementos típicos de la belleza.

El matemático Luca Pacioli en su *"De Divina Proportione"* de 1509 considera la sección dorada, la misma que utilizó su amigo Miguel Angel y que posteriormente abordaremos.

Durante el siglo XVII y principios del XVIII prevalecieron los conceptos de "ingenio" y "buen gusto". En éste último está implícito un esfuerzo de atención, luego un juicio estético intuitivo dependiendo del buen gusto y finalmente el análisis.

Leibniz pudo admitir las percepciones y juicios estéticos como parte del saber y definió la Música como el contar sin saber que se está contando. Esto último concuerda con el concepto de Birkhoff en el sentido de que la densidad de ciertas relaciones ordenadas entre las notas consideradas intuitivamente, miden el efecto estético. De Crousaz escribe, que el buen gusto nos hace apreciar, al principio, por sensaciones, aquello que la razón hubiera aprobado.

Rameau observó que una nota musical está compuesta por un sonido fundamental y varias parciales, y que las notas que difieren por una octava son similares en cuanto a su efecto estético y pueden considerarse casi idénticas. Estos hechos conducen al entendimiento de la música occidental. Fue d'Alembert quien dio una clara presentación del trabajo de Rameau (el cual es cualitativo, a diferencia del tratamiento cuantitativo de Birkhoff). Así, el grado de armonicidad es distinto del agrado o medida estética. Por ejemplo, el unísono y la octava son los más armoniosos de los intervalos pero no los más agradables.

Euler, en 1739, desarrolló una teoría de consonancia basada en la ley pitagórica. Entre más pequeños sean los números que expresan la relación de vibración de dos notas, éstas serán más consonantes. De esta forma, Euler estableció un criterio de armonicidad de cualquier intervalo o acorde que concuerda con los hechos observados. Es interesante que Euler formulara una ley cuantitativa para la medida de la armonicidad. Así, el concepto general de Euler acerca de la naturaleza del goce estético concuerda completamente con el de Birkhoff, que en palabras de Helmholtz años después, establecían que entre más fácilmente percibamos el orden que caracteriza a los objetos contemplados, éstos parecerán más simples y perfectos, y más fácil y gozosamente los reconoceremos. Un orden que cuesta trabajo descubrir, aunque ciertamente nos halague, asociará cierto grado de desgaste y tristeza.

Birkhoff aclara que su teoría carece de toda matemática excepto la simple enumeración y que su trabajo es un mero ensayo. En su trabajo desarrolla las bases psicológicas de su fórmula, la aplica a formas poligonales, a ornamentos y a vasos.

Para el caso de la medida estética de formas poligonales, Birkhoff considera la fórmula $M = O/C = (V + E + R + HV - F)/C$ en donde V es la simetría vertical, E es el equilibrio, R es la simetría central, HV es la relación con una red horizontal-vertical, F es la forma no satisfactoria que incluye diversos factores y C es la complejidad. Cada variable asume valores dependiendo de varias condiciones, largas de enumerar en este artículo. También aplica su fórmula a los acordes diatónicos, armonía y melodía así como a la calidad musical en la poesía.

En el caso musical, su teoría está basada en las relaciones de orden entre las notas y puesto que la apreciación de tales relaciones continuamente cambia y se desarrolla, no trata de formar una teoría definitiva de la medida estética que sea válida para el futuro o el pasado. Más bien, considera que el problema principal de la forma musical es el de que dado un conjunto de recursos musicales debemos determinar hasta qué grado las relaciones de orden entre las notas de una composición constituyen una base eficiente de disfrute musical.

Para el caso de acordes diatónicos la complejidad C se deja a un lado, puesto que un simple acorde es un objeto unitario y los únicos ajustes automáticos son ajustes incipientes a un sólo conjunto de notas

y así la medida estética de un acorde será igual a su orden. Luego $m = Cd + I + D$ donde m es la medida estética de un sólo acorde tomado en una tonalidad mayor por ejemplo, Cd denota el valor del acorde y se refiere a ciertas características que no cambian cuando sus notas superiores se mueven arriba o abajo por octavas, I es el valor del intervalo y D es el valor de la nota dominante. En cuanto a la sucesión de acordes, Birkhoff propone la fórmula $M = m_1 + t + m_2$ donde m_1 y m_2 denotan las medidas estéticas de los acordes y t la de la transición.

También Birkhoff analiza el problema de la melodía y deja abierto el problema del ritmo. Su trabajo puede continuarse aún más y la utilización de la computadora sería de gran ayuda. Su intención fue la de proveer procedimientos sistemáticos de análisis en simples dominios de la Estética. Concluye que hay una enorme diferencia entre el descubrimiento de un diamante y su tasación; aún más, entre la creación de una obra de arte y un análisis de los factores formales que entran en ella.

En 1202 Leonardo de Pisa, cuyo sobrenombre era Fibonacci (en abreviación de filius Bonacci) escribió un libro llamado *Liber Abacci* (o libro sobre el ábaco). Sobrevive la segunda edición del año 1228. Contenía casi todo el conocimiento aritmético y algebraico de esa época y jugó un papel fundamental en el desarrollo de la matemática occidental, pues a través de él, los europeos se familiarizaron con el sistema numérico indoarábigo. Contenía muchísimos ejemplos. Veamos uno de ellos, reformulado de la siguiente manera: suponga que los conejos no se reproducen durante su primer mes de vida, pero que a partir del segundo mes cada pareja de conejos produce un nuevo par. Suponga que ningún conejo muere. Si comenzamos con un par de conejos, ¿cuántas parejas de conejos hay a los doce meses y en general a los n meses? La sucesión de las parejas adultas es de la forma

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ...

es decir, la sucesión dada por la fórmula $u_1 = u_2 = 1$ y $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ para n mayor o igual que 2. Esta sucesión se llama *sucesión de Fibonacci* y sus términos *números de Fibonacci*. Si consideramos $b_n = u_{n+1}/u_n$ como el cociente de crecimiento, obtendremos una sucesión, cuyo límite cuando n tiende a infinito es 1.618034... Este número, juega un papel muy importante en la Geometría y en la Estética. Si dividimos un segmento

de recta AB en un punto C tal que $AB : AC = AC : CB$ tal división se llama *sección o razón áurea* (Kepler la llamó *proporción divina*). Si $AB = 1$ y $AC = x$ entonces $x^2 + x - 1 = 0$. Luego $x = .618034\dots$ Así, la parte mayor de cualquier longitud, dividida en razón áurea, es igual a la longitud total multiplicada por $.618034\dots$

Bela Bartok (1881-1945) alrededor de 1915 desarrolló un método para integrar todos los elementos de la música (escalas, estructuras de acordes con los motivos melódicos apropiados, proporciones de longitud, tanto de la obra en general como los de la exposición, desarrollo, reexposición, frases de conexión entre movimientos etc.) basado en la razón áurea. Es sorprendente que Bartok nunca escribiera o platicara de esto durante su vida. Ya los caldeos habían propuesto utilizar la razón áurea como principio estético 3000 años A.C., los griegos la utilizaron 2000 años después y fue reutilizada en el renacimiento pero nunca en la Música. Solamente se conoce un movimiento de un cuarteto de Haydn compuesto con longitud acorde a la sección áurea pero ésta es más una composición aislada que un principio o método de composición.

El círculo tonal de Bartok es el siguiente. Considérese el *círculo de tonalidades vecinas o círculo de quintas* dado de la siguiente forma: hágase una correspondencia biunívoca entre las notas $\{do, do\#, re, re\#, mi, \dots, si\}$ y los números $0, 1, 2, \dots, 11$, en ese orden; luego, considérese el grupo cíclico C_{12} generado por el 7 y ordénese este grupo en una circunferencia. Tomemos el *do* como la tónica T y asígnense las letras D, S y T sucesivamente a cada nota del círculo. D designará a la *dominante* y S a la *subdominante*. Así *la* será tónica con subdominante *re* y dominante *mi*, etc. Si unimos, mediante ejes, los puntos T, D y S , obtendremos los llamados *ejes de las tónicas*, de las *dominantes* y de las *subdominantes*. Deben de considerarse como una relación de tonalidades similar a la forma usual en la música de mayor-menor. En particular, existe una relación más adecuada entre los polos opuestos. Esta relación es el principio fundamental de la música de Bartok. Muchos ejemplos de su música siguen este principio.

En cuanto a la Forma y la Armonía, Bartok utiliza el principio de la razón áurea. Por ejemplo, en el primer movimiento de la Sonata para dos pianos y percusiones, que consta de 443 compases, si se multiplica este número por $.618\dots$ se obtiene el compás 274, el cual será el centro de gravedad del movimiento. Así la reexposición o recapitulación ocurre

en el compás 274. Análogamente sucede con el primer movimiento de Contrastes, el cual consta de 93 compases, número que si se multiplica por .618... da el compás 57 justo donde comienza la reexposición. Hay muchos ejemplos más.

En cuanto al tratamiento armónico, en los compases 2 al 17 de la introducción de la Sonata para dos pianos y percusiones es donde se asientan los gérmenes de la obra. Los compases 2 al 5 de la primera parte están en la tónica *Fa# – Do* con el motivo en posición fundamental, los compases 8-9 de la segunda están en la dominante *Sol-Re bemol* también con el motivo en posición fundamental y la tercera parte, del compás 12 en adelante está en la subdominante *La bemol-Re* con el motivo invertido. Hay 46 unidades de valor 1/8 y si se multiplica 46 por .618... se obtiene la unidad 28 que es en donde comienza el motivo invertido. El análisis puede continuarse, y si se llama positiva a la porción larga y negativa a la porción corta puede decirse que existe una relación de simetría entre las partes positivas y negativas. Este proceso va acompañado con un incremento en la dinámica de *pp* a *f* ó *ff* en la sección positiva y la negativa va acompañada de una disminución de la intensidad sonora. Toda la obra puede dividirse en partes lenta-rápida+lenta-rápida en los movimientos. La sección áurea debe de aparecer al comienzo del segundo movimiento lo cual sucede si se considera el total de los 6432 octavos que al multiplicarlos por .618... da el octavo 3975 que es en el cual justamente comienza el segundo movimiento.

Si comparamos la sucesión de Fibonacci con la fuga (primer movimiento) de la Música para Cuerdas, Percusiones y Celesta observamos que los 89 compases del movimiento están divididos en secciones de 55 y 34 compases. Estas secciones se subdividen en secciones de 34 y 21 compases y 13 y 21 compases respectivamente. El clímax en *fff* ocurre en el compás 55 y en los extremos comienza y finaliza en *pp*. No es una casualidad que la exposición finaliza en el compás 21 y que los últimos 21 compases están divididos en secciones de 13 + 8 compases.

El Allegro Bárbaro es otra composición para piano solo en la cual Bartok utiliza los números de Fibonacci 2, 3, 5, 8, y 13 en diversas ocasiones, a diferencia de la música tradicional la cual utiliza 8 compases en casi todos los temas y múltiplos de 2 en los motivos y frases. También utiliza su círculo de tonalidades y la duración de la pieza es de 3 minutos.

Bartok escribió que seguía a la naturaleza en la composición y que fue guiado indirectamente por fenómenos naturales para descubrir estas regularidades. Constantemente aumentaba su colección de plantas, insectos y especímenes minerales. El girasol era su planta favorita y se ponía muy feliz cuando encontraba piñas de abeto en su escritorio. Consideraba que la música folclórica también era un fenómeno de la naturaleza y que sus formaciones se desarrollaban tan espontáneamente como otros organismos vivientes: las flores, los animales, etc. Por esto su música le recuerda al oyente de escenas naturales. Por ejemplo, el girasol tiene 34 pétalos y sus espirales tienen los valores 21, 34, 55, 89, 144.

Su uso de los acordes también está basado en los números de Fibonacci. Por ejemplo, en semitonos, 2 es una segunda mayor, 3 es una tercera menor, 5 es una cuarta, 8 es una sexta menor y 13 es una octava aumentada, etc. Cuando Bartok utiliza acordes en un movimiento cromático, coloca la tercera menor sobre la cuarta justa de tal forma que el acorde adquiere la forma 8:5:3 y considerando una tercera menor, superponiéndole una cuarta seguida de otra tercera menor se obtiene su acorde característico mayor-menor. La sección áurea, no es una restricción externa sino una de las leyes más intrínsecas de la música como lo muestra la pentatonía, quizás el más antiguo de los sistemas de sonido del hombre y el cual puede considerarse como una expresión pura del principio de la sección áurea.

Deseo mencionar brevísimamente uno de los proyectos más interesantes que actualmente se desarrollan en este campo. Me refiero a la Teoría Matemática de la Música de G. Mazzola, la cual no es una versión moderna de los pensamientos esotéricos de Pitágoras. Está basada en las Teorías de Módulos y Categorías, Teoría de Topos, en la Topología Algebraica y Combinatoria. Su propósito es el de describir las estructuras musicales. La filosofía detrás de ella es la de comprender los aspectos de la Música que están sujetos al raciocinio de la misma manera en que la Física puede hacerlo de los fenómenos propios del trabajo científico. Esta teoría está basada: en un lenguaje adecuado para manejar los conceptos relevantes de las estructuras musicales, en un conjunto de postulados o teoremas con respecto a las estructuras musicales sujetas a las condiciones definidas y, en la funcionalidad para la composición y el análisis con o sin computadora.

Se observa que las estructuras musicales son estructuras globales pegadas con datos locales. Mazzola utilizó la selección de una cubierta como atlas, la cual es parte del punto de vista en el sentido de Yoneda y Adorno. Las cartas se llaman *composiciones locales* y consisten de subconjuntos finitos K de módulos M sobre un anillo R . Estas cartas K se pegan y comparan mediante isomorfismos de los módulos subyacentes. Tales objetos globales, los cuales generan diferentes categorías se llaman *composiciones globales*. Recientemente ha reformulado estos conceptos con matemática aún más sofisticada.

Y bien, ¿qué relación existe entre la Música y la Matemática? Es decir, ¿qué conexión o correspondencia existe? Hemos visto cómo se han aplicado conceptos matemáticos (provenientes al fin y al cabo de la naturaleza, del pensamiento abstracto del Hombre, etc.) al entretenimiento con un juego de dados, a la Estética, a la Composición Musical y al Análisis Musical. Desde luego que la Acústica, la cual utiliza a la Matemática, es parte de la Física y de la Música.

Algunos piensan que la Matemática es un juego simple que sola y fríamente interesa al intelecto. Esto sería el olvidar, asienta Poincaré, la sensación de la belleza matemática, de la armonía de los números y las formas, así como de la elegancia geométrica. Esta es ciertamente una sensación de placer estético que todo verdadero matemático ha sentido y por supuesto que pertenece al campo de la emoción sensible. La belleza y la elegancia matemática consisten de todos los elementos dispuestos armónicamente tales que nuestra mente pueda abarcarlos totalmente sin esfuerzo y a la vez mantener sus detalles. Esta armonía, continúa Poincaré, es, de inmediato, una satisfacción de nuestras necesidades estéticas y una ayuda para la mente que sostiene y guía. Y al mismo tiempo, al poner bajo nuestra visión un todo bien ordenado, nos hace entrever una ley o verdad matemática. Esta es la sensibilidad estética que juega un papel de filtro delicado, la cual explica suficientemente el porqué el que carece de ella nunca será un verdadero creador, concluye Poincaré.

El genio de Mozart consistió en escoger las mejores o más bellas frases musicales de toda la enorme gama de posibilidades para crear su Música. Poincaré menciona que la creación de nueva Matemática no consiste en hacer combinaciones nuevas de entidades matemáticas ya conocidas, sino solamente en tomar las combinaciones útiles, las cuales son

una pequeña proporción. Si solamente fuera la rutina de aplicar reglas, las combinaciones obtenidas serían exageradamente numerosas, inútiles o extrañas. El trabajo del inventor o creador consiste en escoger solamente las combinaciones útiles y las reglas o el procedimiento que conduce a esta elección es extremadamente fino y delicado. Es casi imposible, dice Poincaré, el establecer estas reglas o procedimientos. Es cosa de sentir las mas bien que el de formularlas. Bajo estas condiciones imagínense a una máquina o aparato de cómputo aplicándolas mecánicamente. Sucedería lo mismo que con el juego de Mozart.

Poincaré escribe a principios del siglo XX, que una demostración matemática no es una simple yuxtaposición de silogismos, sino silogismos colocados con cierto orden y que el orden en que son colocados es mucho más importante que los silogismos por sí solos. Comenta que no tiene miedo de que alguno de éstos se le olvide pues cada uno de ellos tomará su lugar en el arreglo sin el menor esfuerzo. También describe el proceso de creación: primero se realiza un trabajo consciente acerca del problema, después deja madurar esas ideas en el subconsciente, luego aparece la solución, quizás cuando menos se espera, y finalmente ésta se escribe.

Mucha Matemática se crea por simple curiosidad. Pero esta simple curiosidad sólo la poseen los grandes matemáticos. Uno de los problemas más difíciles para un matemático principiante (o no tan principiante) es el de encontrar un problema. A menudo sucede que casi toda la emoción de la creación y penetración está concentrada en formular la pregunta adecuada. Podría decirse que esto es más de la mitad del trabajo y a menudo la que requiere de inspiración. Esta es una gran diferencia con la investigación en otras áreas del conocimiento y es precisamente por esto el que la investigación matemática es extremadamente difícil. La respuesta puede ser también difícil, puede requerir mucho ingenio, puede utilizar técnicas conocidas y en el mejor de los casos requiere de la invención de nuevas técnicas. El matemático no procede como un detective para encontrar la solución de su problema. No es una computadora de deducciones, sino procede mediante experimentación (que no utiliza tubos de ensayo o equipos costosos), mediante la inducción y, si hay suerte, inspiración. En otra ocasión les escribiré acerca de la Matemática, cuánta hay, cómo son sus creadores, cómo se crea una teoría matemática, qué significa la palabra Matemática, cuales son sus ramas, cuántos matemáticos hay, etc. etc.

El Arte y la Ciencia son una actividad exclusivamente humana. Mucho más de la mitad del cultivo del conocimiento, es decir, de la cultura, lo constituye el conocimiento científico. Este es un hecho ampliamente ignorado por la mayoría de la gente que piensa que la cultura solamente está constituida por conocimientos literarios o artísticos. Es un gran error ver a la cultura de este modo.

Si en lugar de preguntarnos ¿qué relación existe entre la Música y la Matemática? nos preguntáramos ¿qué relación existe entre los matemáticos y los músicos? Podríamos decir que algunos matemáticos adoran la Música, muchos con un enfoque similar a la medida estética de Birkhoff. A muchos matemáticos les agrada el orden mental, ven a la Música como si fueran matemáticas pero sin tener que lidiar con una lógica inflexible. Gustan más de Mozart que de Stockhausen, Schoenberg o Bartok. Sin embargo a muchos músicos no les agrada la Matemática, generalmente por que no la conocen. Hay otros músicos a quienes sí les agrada la Matemática (Mozart, Bartok, Ponce, entre otros).

Si nos preguntamos más que cómo se relacionan, en qué se parecen, podría decir que, para los que ven a la Ciencia y al Arte como una actividad olímpica en donde se trata de ser altamente competitivos, productivos y pertenecer a las grandes ligas comerciales, la Matemática y la Música se utilizan como un medio y no como un fin. Así, algunos músicos se empeñan en tocar el mayor número de notas en el menor tiempo posible y ya se imaginarán ustedes el equivalente entre los matemáticos.

El ser humano es producto de un proceso evolutivo que comenzó hace unos 4000 millones de años. Hace menos de diez millones de años aparecieron los primeros seres que se parecían al ser humano y hace apenas unos cuantos millones de años que emergieron los primeros seres humanos. Pero apenas ayer, hace unos dos mil años que tenemos cultura. Las grandes obras musicales fueron compuestas hace sólo 350 años y exceptuando la geometría de Euclides casi toda la Matemática data de hace también 350 años. Nuestro quehacer cultural es relativamente nuevo y reciente. Podemos perderlo con mucha facilidad. Siempre que una sociedad se encuentra en crisis, lo más vulnerable y lo primero en desaparecer es el arte y la ciencia. Parece que la sociedad humana y sus gobernantes no quieren darse cuenta de lo delicado y fino que es la creación artística y científica. Esta creatividad es precisamente la que distingue al ser humano de los animales y que el acabar con sus artistas

y científicos es acabar con la cultura y con la civilización. Recuperarlos es demasiado difícil y el precio es inconmensurable. Es lo mismo que la destrucción de la Biblioteca de Alejandría por los bárbaros. Un pueblo que no puede cultivar el conocimiento está destinado a quemar sus bibliotecas. Un pueblo que no conoce la historia, que no conoce los grandes errores que se han cometido, está destinado a volverlos a cometer y así sucede por desgracia.

Recordemos que la ciencia y el arte son actividades esencialmente humanas. La Matemática es una de las “Bellas Artes” que posee el don de ser al mismo tiempo la más elaborada y sofisticada de todas las ciencias. Esta es una frase muy difícil de comprender para la mayoría de las personas. Sin embargo, la ciencia es una manera eficaz y elegante de comprender el universo. La ciencia se autocorriges. Nuestra vida y nuestro destino están indisolublemente ligados a la ciencia. Es esencial para nuestra simple supervivencia que comprendamos la ciencia. Para quien la comprende, la ciencia es un placer. Hemos evolucionado de tal modo que el hecho de comprender nos proporciona placer, porque el que comprende tiene mayores posibilidades de sobrevivir.

La Matemática, a diferencia de la Música, no es para espectadores. Es un lenguaje que, o bien se habla, o bien no se entiende absolutamente nada. No hay estadios de matemáticas para un gran público. Entonces, vuelvo a preguntar ¿qué relación existe entre la Matemática y la Música? J.J. Sylvester escribe en 1864: “May not Music be described as the Mathematic of Sense, Mathematics as Music of the reason? The soul of each the same?” Es decir, “¿Acaso no puede describirse la Música como la Matemática de lo sensible y la Matemática como la Música del entendimiento? El alma de cada una, la misma”. Ambas se crean, se recrean, podemos apreciarlas y disfrutarlas. Una ventaja o desventaja, según se quiera ver, es que para la Matemática no existe un instrumento musical donde tocarla, ésta se queda a nivel de partitura, podría decir, que va directamente de pensamiento a pensamiento.

Para mí, la relación más importante entre la Matemática y la Música es, que ambas son “Bellas Artes”. Poseen características similares. Deseo finalizar este pequeño artículo escribiendo una vez más, que la Matemática es una de las “Bellas Artes”, la más pura de ellas, que tiene el don de ser la más precisa de las Ciencias.

Referencias

- [1] BIRKHOFF, G.D. (1932). *A Mathematical Theory of Aesthetics*. Rice Institute Pamphlet. Vol. 19.
- [2] BIRKHOFF, G.D. (1929). *Quelques Eléments Mathématiques de L'Art*. Atti Congr. Intern. d. Matem., Bologna. Vol.1. p. 315-333.
- [3] BIRKHOFF, G.D. (1945). *Medida Estética*. Universidad Nacional del Litoral, Rosario, Argentina.
- [4] LENDVAI, E. (1979). *Bela Bartok: An analysis of his music*. Kahn & Averill, London.
- [5] MAZZOLA, G. (1985). *Gruppen und Kategorien in der Musik: Entwurf einer mathematischen Musiktheorie*. R & E. 10. Helder-mann Verlag Berlin.
- [6] MAZZOLA, G. (1994). *Mathematical Music Theory- An Informal Survey*. Note di matematica e fisica. CEFIM, Anno 7., Vol.7, Locarno.
- [7] MAZZOLA, G. Véase www.encycloSPACE.org.

Emilio Lluis-Puebla
Departamento de Matemáticas Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México.
lluisp@servidor.unam.mx,
lluis@smm.org.mx