

DOS MODELOS SIMPLES DEL MÉTODO DE LAS MOSCAS ESTÉRILES PARA LA ELIMINACIÓN DE LA MOSCA DE LA FRUTA

Walter Mario Solano Reynoso

Resumen

Existen muchos modelos matemáticos sobre control biológico, siendo de interés práctico en agricultura ecológica. Un método conocido para el control de la mosca de la fruta es el método de las moscas estériles que son propagadas con cierto tamaño de población, habiéndose planteado diversos modelos al respecto, tanto continuos como discretos, para predecir las condiciones bajo las cuales la población de moscas pueda ser eliminada. En este reporte se han estudiado dos modelos continuos simples planteados por J. D. Murray (Mathematical Biology, Springer-Verlag, 1990) que tienen carácter académico y pedagógico, especialmente para ilustrar las condiciones bajo las cuales se puede eliminar la población de moscas.



En el primer modelo, llamado modelo CI, es una ecuación diferencial ordinaria no lineal, donde se han encontrado dos puntos fijos, el primero inestable, donde para valores menores de dicho punto, se elimina la población de moscas, y otro, estable, entorno del cual no se llega a eliminar la población de moscas. En el segundo modelo, denominado CII, planteado como un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias, se han construido los retratos de fase en torno de los puntos fijos, mostrando las condiciones bajo las cuales se consigue eliminar la población de moscas. Debido a que las ecuaciones diferenciales ordinarias que modelan el problema son no lineales, el trabajo es también una ilustración de la necesidad y el poder del cómputo numérico como herramientas en aplicaciones prácticas que pueden coadyuvar a resolver problemas en control biológico.

1 Introducción

Los métodos para combatir las plagas de insectos perjudiciales en la producción agrícola introducidos en los años 40 del siglo XX estaban basados en pesticidas que gradualmente fueron reemplazados por DDT y posteriores generaciones de pesticidas químicos. Como es sabido, ellos no han sido definitivamente efectivos, ya que a la larga no erradicó la enfermedad y los efectos colaterales fueron perjudiciales para la salud humana y el medio ambiente, además de generar amplia resistencia a las diferentes variedades de pesticidas químicos junto con la toxicidad a otras especies no perjudiciales. Sin embargo, en las últimas décadas, con el desarrollo de la ingeniería genética, se han introducido nuevas técnicas genéricamente denominadas como control biológico, manipulándose la creación de especies que combatan a las perjudiciales. Particularmente en el tratamiento de la mosca de la fruta, uno de los métodos eficaces es el método de los insectos estériles (MIE), en el cual se esterilizan los insectos por irradiación y luego se diseminan en la zona a combatir [1, 2]. Si bien la manipulación genética mediante técnicas de recombinación del ADN pueden ser precisos de un punto de vista de la biología molecular, el uso de especies manipuladas genéticamente como agentes de control biológico requiere cuidadosa investigación a fin de evaluar la eficacia de los nuevos agentes y explorar la posibilidad de problemas potenciales. En este camino, la búsqueda de modelos matemáticos del comportamien-

to de la población de insectos y su interacción con su medio ambiente ha significado un factor coadyuvante importante en el control biológico [1,2,3,4,5,6].

Los programas de erradicación de la mosca de la fruta en el Perú datan de la década de los años sesenta del siglo XX, específicamente en los valles de Tacna y Moquegua. A partir de 1999, el Servicio Nacional de Sanidad Agraria viene implementando el proyecto del control, supresión y erradicación de moscas de la fruta con el objetivo de declarar "Áreas Libres" de la mosca del mediterráneo y de la mosca sudamericana [6].

En el presente trabajo se ha estudiado con cierto detalle dos modelos propuestos por Murray [1] en la forma de ecuaciones diferenciales ordinarias, encontrando las condiciones bajo las cuales es posible eliminar la población de moscas cuando ella es contaminada con moscas esterilizadas. Si bien los modelos son simples, es ilustrativo del punto de vista académico y pedagógico, tanto para el aprendizaje de tratamiento de modelos matemáticos y sus técnicas básicas así como el inicio de la búsqueda de modelos más realísticos [2] y [3] que de hecho serán más complicados. Los parámetros que se utilizaron fueron estimados a partir de algunos datos proporcionados en las referencias [6] y [7].

2 El Modelo del Método de las Moscas Estériles

Se han bosquejado modelos que permitan obtener discernimientos sobre el comportamiento poblacional de la mosca de la fruta en interacción con moscas estériles, ya que un método efectivo y no contaminante para el control o eliminación de la población de la mosca de la fruta es infestarlas con moscas estériles. La idea básica del método de los insectos estériles (MIE) es "diluir" el potencial reproductivo de una población adicionando insectos estériles, típicamente machos. Se supone que el apareamiento con moscas estériles, machos o hembras, evitará la reproducción. Se parte del hecho de que la población de moscas no estériles, N , varía con el tiempo según la relación

$$\frac{dN}{dt} = (\beta - \delta) N, \quad (1)$$

donde β es la tasa o índice de nacimiento y δ es la tasa de la mortalidad. Se conjetura que β es proporcional a N e inversamente proporcional a la población $N + n$, donde n es la población de moscas estériles; es decir, se puede escribir

$$\beta = \frac{aN}{N + n}, \quad (2)$$

donde a es una constante que está relacionada con la tasa de nacimiento. La influencia de n en el denominador está claro si pensamos que un incremento de moscas estériles influye en la disminución del índice del nacimiento. Por otro lado, la competición por recursos alimenticios entre moscas estériles y normales nos lleva a un término adicional en la ecuación (1), que hará que la población N de moscas normales tienda a disminuir. Suponemos que esta interacción es proporcional al producto de la población N por $N + n$, es decir, $N(N + n)$. Así, teniendo en cuenta (1) y (2) se tiene

$$\frac{dN}{dt} = \left(\frac{aN}{N + n} - \delta \right) N - kN(N + n), \quad (3)$$

donde a , δ , n y k son constantes positivas. A esta ecuación la denominamos modelo continuo I (CI).

Una extensión del modelo anterior considera a n como otra variable [1], donde se considera que una fracción γ de los insectos que nacen son estériles, planteándose el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \left(\frac{aN}{N + n} - \delta \right) N - kN(N + n) \\ \frac{dn}{dt} &= \gamma N - \delta n \end{aligned} \quad (4)$$

que es el modelo continuo II.

También existen modelos discretos del método de los insectos estériles en forma de ecuaciones en diferencias, donde el tiempo es discretizado y que eventualmente podrían ser más útiles en aplicaciones prácticas [2].

3 Metodología y Resultados

El formalismo matemático utilizado en este trabajo está relacionado en gran parte con las aplicaciones que devienen de la teoría de las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos, los cuales son utilizados en la simulación numérica e interpretación de los resultados. Bosquejamos, por razones pedagógicas, la secuencia de pasos para llegar a los resultados y el correspondiente análisis, de modo que se tenga clara la relación con los modelos planteados, la teoría utilizada y los resultados encontrados:

- a. *Adimensionalización de las ecuaciones y reescalamiento de las cantidades que intervienen.* Las ecuaciones que describen procesos reales son necesariamente dimensionalmente homogéneas. La adimensionalización conducirá a ecuaciones donde cada término es simplemente un número [8]. De hecho, esto conducirá a reescalar las cantidades correspondientes como se verá después.
- b. *Estimación de los parámetros e identificación de los parámetros del control.* Puesto que los parámetros que intervienen (constantes) en las ecuaciones son números que describen cierta realidad, ellos son estimados de acuerdo a las mediciones obtenidas y su disponibilidad. Sin embargo, como se realizará un estudio numérico de simulación, eventualmente la disponibilidad de los datos no es crucial puesto que en el proceso numérico se puede hacer un barrido para diferentes valores de las constantes.
- c. *Resolución de las ecuaciones diferenciales.* De acuerdo a la teoría [10,11,12 y 13], hay que determinar los puntos fijos y su estabilidad. Eventualmente este estudio conducirá al uso de los recursos computacionales. Debemos encontrar las condiciones bajo las cuales la población de moscas se incrementa, elimina o permanece estacionaria en los modelos propuestos para el método de los insectos estériles.
- d. *En el proceso computacional deberá elegirse algún paquete para el tratamiento matemático, numérico y gráfico.* En este trabajo se ha utilizado el software *Mathemática* [9] en su versión 4.0. Esta selección obedece básicamente a la posibilidad de realizar prácticamente todo el trabajo y fue suficiente utilizar una computadora personal.

3.1 Adimensionalización de las Ecuaciones

Para trabajar con números puros es suficiente dividir las ecuaciones (3) y (4) entre el parámetro a que tiene unidades de 1/tiempo, de modo que multiplicando t por a se tiene un número adimensional $\tau \rightarrow at$. Con esto, la variable independiente sería τ ; no obstante, por razones de costumbre y de simplificación en la notación, continuaremos usando t en lugar de τ , sobreentendiendo que estamos trabajando con un t adimensional. En cuanto a las cantidades N y n , ellas representan números puros, puesto que sólo están indicando el número de moscas normales y estériles, respectivamente. Así, tendremos las adimensionalizaciones siguientes:

$$at \rightarrow \tau, \delta \rightarrow \frac{\delta}{a}, k \rightarrow \frac{k}{a}, \gamma \rightarrow \frac{\gamma}{a} \quad (5)$$

de modo que las ecuaciones (3) y (4) se escriben como

$$\frac{dN}{dt} = \left(\frac{N}{N+n} - \delta \right) N - kN(N+n), \quad (6)$$

que es el modelo CI, y

$$\frac{dN}{dt} = \left(\frac{N}{N+n} - \delta \right) N - kN(N+n) \quad (7)$$

$$\frac{dn}{dt} = \gamma N - \delta N,$$

denominado modelo CII. Como se observa, estos modelos son simples y las ecuaciones diferenciales que las representan son no lineales.

3.2 Estimación de los Parámetros

En vista de no tener datos disponibles de los índices de nacimiento y de mortalidad, hemos utilizado la información de la referencia [7] para estimar las constantes y en el informe final de investigación de la UNSCH (Año 1999) [10] se describe un procedimiento para estimar los parámetros de modo que puedan ser los más cercanos a los datos reales. Así, los estimados nos llevan a obtener que $a = \frac{10}{3}$ días⁻¹ (esto quiere decir que la variable temporal que se usará estará dividida por $\frac{10}{3}$ y en días),

considerando $\delta = \frac{1}{120}$ se obtienen valores para k cercanos a 0.0042, el cual puede variar en el análisis.

3.3 Modelo CI

Los puntos fijos o de equilibrio corresponde a la condición $\frac{dN}{dt} = 0$, de modo que para el modelo CI se tiene

$$f(N) = \left(\frac{N}{N+n} - \delta \right) N - kN(N+n) = 0, \quad (8)$$

mostrándose en la figura 1 la gráfica de $f(N)$ en función de N , se observa la solución $N = 0$, que significa simplemente la inexistencia de la población de moscas normales (que no es de interés), y las otras dos dadas por

$$\bar{N} = -n + \frac{1-\delta}{2k} \pm \sqrt{\left(\frac{1-\delta}{2k} \right)^2 - \frac{n}{k}}, \quad (9)$$

donde se considera que los parámetros δ y k son fijos para un dado medio ambiente dado. Como es obvio, podemos controlar la población de moscas estériles y en la figura 2 se muestra el comportamiento de los valores de punto fijo, \bar{N} , en función de n . La curva inferior representa la solución de raíz cuadrada negativa y la superior la de raíz cuadrada positiva, coincidiendo ellas justamente cuando la raíz cuadrada es cero, donde se cumple la condición

$$n = \frac{(1-\delta)^2}{4k}, \quad (10)$$

y el punto fijo estará dado por

$$\bar{N} = \frac{1-\delta^2}{4k}. \quad (11)$$

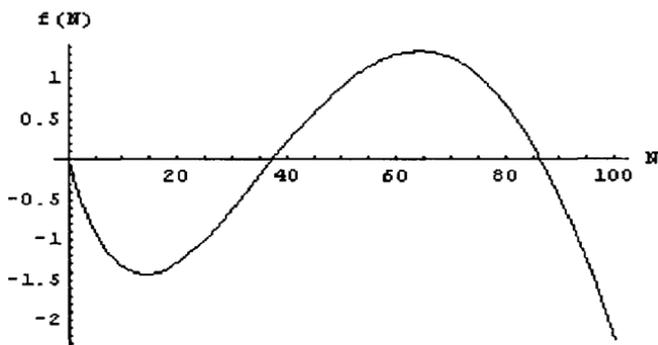


Figura 1. Gráfica de la ecuación (8) mostrando el comportamiento típico de los cortes con el eje de las abscisas, los cuales representan las dos raíces diferentes de cero, es decir, los puntos fijos o de equilibrio.

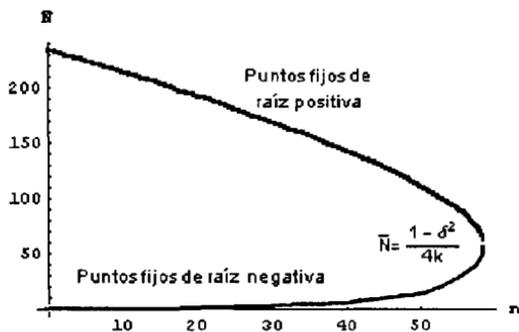


Figura 2. El comportamiento de los dos raíces representada por la ecuación (10), donde el vértice de la gráfica es el valor de \bar{N} , dado por (11), que representa un punto no hiperbólico.

Ahora, resolviendo numéricamente la ecuación diferencial, ecuación (6), en torno de los dos puntos fijos dados por (9), obtenemos soluciones cuyas curvas están mostradas en la figura 3 para diferentes condiciones iniciales de la población inicial de moscas nativas. El aspecto más importante de este resultado es observar que para condiciones iniciales debajo del punto fijo de raíz cuadrada negativa, la población de moscas nativas es eliminada, mientras que para valores mayores, la población de moscas tiende a un valor fijo que es justamente la solución de punto fijo de raíz

cuadrada positiva. En la terminología utilizada en matemática, el punto fijo inferior es un punto de equilibrio inestable, puesto que a partir de él las soluciones se “alejan”, mientras que el punto de equilibrio superior representa un punto asintóticamente estable, ya que las soluciones tienden a él. En la gráfica mostrada en la figura 3 se han utilizado valores numéricos de los parámetros dados por $\delta = \frac{1}{128}$, $k = 0.0042$, $n = 55$. El punto fijo superior para estos valores es 92.3839 y el inferior 33.8512, ambos en millones.

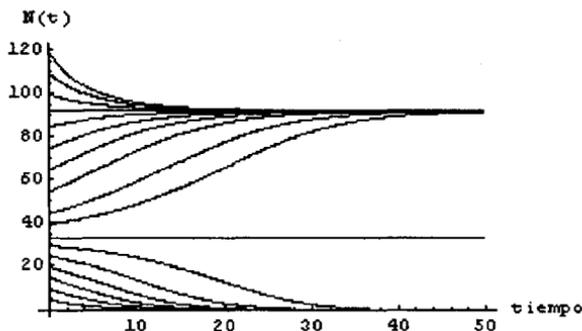


Figura 3. Soluciones de la ecuación diferencial del modelo CI en torno de los dos puntos fijos dados por la ecuación (9). La población moscas se elimina (tiende a cero) para valores iniciales menores que el punto fijo de raíz negativa.

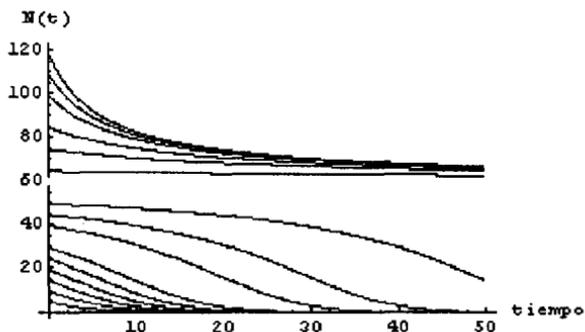


Figura 4. Soluciones del modelo CI en torno del único punto fijo dado por la ecuación (11). Solo debajo de dicho punto fijo se puede eliminar la población de moscas nativas.

Por otro lado, hemos visto que cuando la raíz cuadrada de la ecuación (9) es cero, se tiene una única solución, es decir, un solo punto fijo, dado por la ecuación (11). No podemos asegurar la estabilidad de dicho punto y se denomina punto de equilibrio no hiperbólico. En la figura 4 se tiene graficadas las soluciones de la ecuación diferencial en torno de ese único punto de equilibrio donde el comportamiento de dichas soluciones indica que para condiciones iniciales encima del punto fijo tienden a él, no eliminando la población de moscas nativas, mientras que para valores menores del mismo las soluciones tienden a cero, lo cual significa la eliminación de moscas nativas.

3.4 Modelo CII

De las ecuaciones (7) se plantean las siguientes ecuaciones para determinar los puntos fijos,

$$f_1(N, n) = \left(\frac{N}{N+n} - \delta \right) N - kN(N+n) = 0 \quad (12)$$

$$f_2(N, n) = \gamma N - \delta n = 0,$$

donde dos de las soluciones corresponden a $\bar{N} = \bar{n} = 0$ y la tercera está dada por

$$\bar{N} = \frac{\delta^2}{k(\delta + \gamma)^2} [1 - (\delta + \gamma)] \quad (13)$$

$$\bar{n} = \frac{\gamma\delta}{k(\delta + \gamma)} [1 - (\delta + \gamma)]$$

Hay que tener cuidado que \bar{N} y \bar{n} deben ser siempre positivos, por lo que $1 > \delta + \gamma$. En la figura 5 se muestra la gráfica del punto fijo en función del parámetro γ , donde el punto de intersección corresponde al valor común de \bar{N} y \bar{n} , que resulta cuando $\gamma = 1 - \delta$, dando $\bar{N} = \bar{n} = 0$.

El otro valor corresponde a $\gamma = \delta$, resultando $\bar{N} = \bar{n} = \frac{1 - 2\delta}{2k}$.

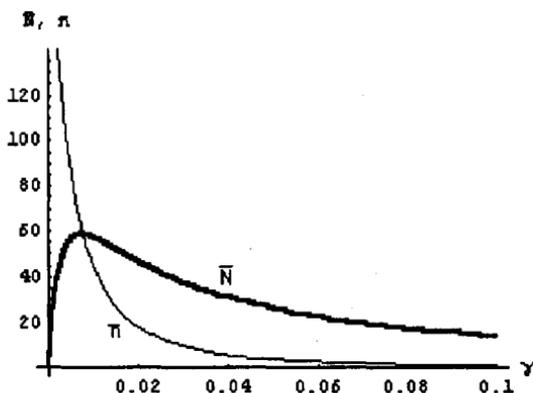


Figura 5. Gráfica de los puntos fijos en términos del parámetro γ .

Al linealizar las ecuaciones (7) se obtiene la matriz jacobiana y los siguientes autovalores

$$\lambda_{\pm} = \frac{\delta}{2(\gamma + \delta)^2}$$

$$\left\{ (1 - \delta)\gamma - \delta - \gamma^2 \pm \sqrt{4(\gamma + \delta) [\gamma^2 - \delta(1 - \delta) + \gamma(2\delta - 1)]} \right\} \quad (14)$$

Obsérvese que la no dependencia de los autovalores respecto del parámetro k facilita el análisis. Puesto que el signo del argumento de la raíz cuadrada determinará si los autovalores son reales o complejos, en la figura 6 se muestra la gráfica del argumento de la raíz en función de γ para $\delta = 1/128$, observando que el argumento es negativo entre cero y cierto valor de $\gamma < 1$, en este caso $\gamma = 0.992172$. Dentro del intervalo de valores que adoptaría γ , las raíces siempre serán complejas.

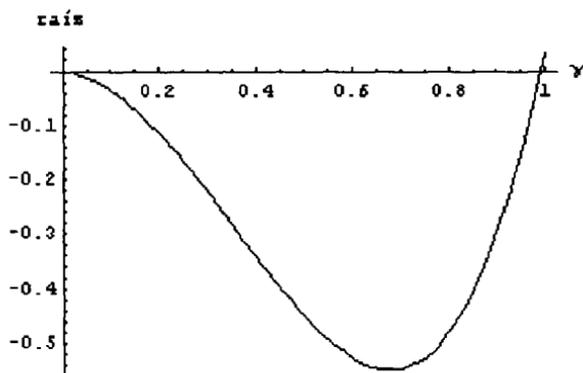


Figura 6. Gráfica del argumento de la raíz en función de γ .

Los resultados de la resolución del sistema de ecuaciones dadas por la ecuación (7) se muestran en las figuras 7, 8, 9, 10 y 11, donde se toman valores de k y γ tales que las partes reales sean positivas y negativas. Las gráficas de los resultados están dadas como los retratos de fase del comportamiento del sistema, estando N en función de n , permitiéndonos visualizar más claramente las cualidades de las soluciones. En la figura 7, para los valores de los parámetros mostrados, se ve claramente que para cualquier condición inicial la población de moscas es eliminada. El punto de la gráfica viene a ser el punto de equilibrio.

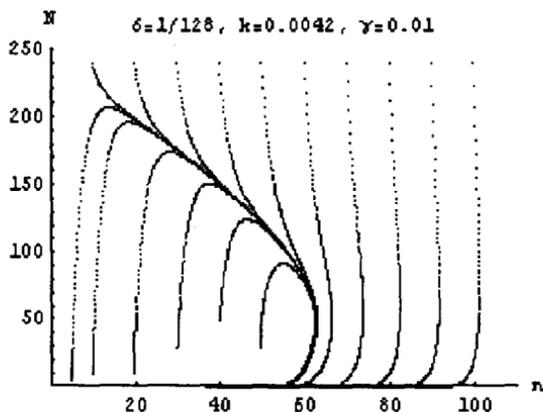


Figura 7. Para los valores de los parámetros mostrados, el punto fijo

ocurre en (57.5818, 44.9858) y todas las condiciones iniciales conducen a la eliminación de las moscas.

En la figura 8, para los mismos valores de δ y k , considerando $\gamma = 0$, se observa que para ciertas condiciones iniciales las soluciones se dirigen al punto fijo, mientras que para otras condiciones iniciales la población de moscas se hace cero. En la figura 9 todas las condiciones iniciales no conducen a la eliminación de la población de moscas.

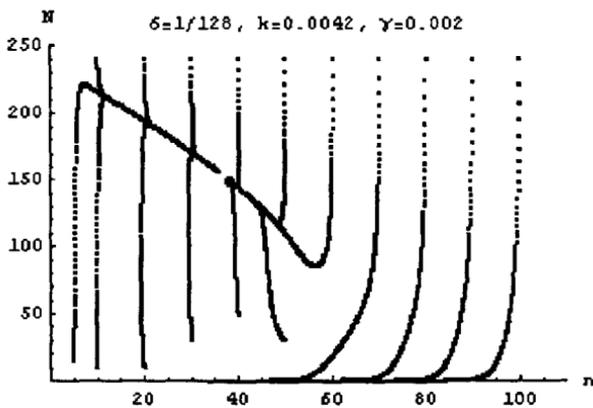


Figura 8. El punto fijo está en (38.2586, 149.448), hacia donde se dirigen una parte de las soluciones, mientras que las soluciones más a la derecha se van a cero.

En la figura 9 se tiene el retrato de fase cuando las partes reales de los autovalores son positivas, dando una inestabilidad asintótica. Observar que en este caso todas las condiciones iniciales nos llevan a eliminar la población de moscas nativas, donde las trayectorias en el espacio de fase contornean el punto equilibrio. Existen condiciones donde la población de moscas crece hasta un máximo y luego disminuye hasta desaparecer.

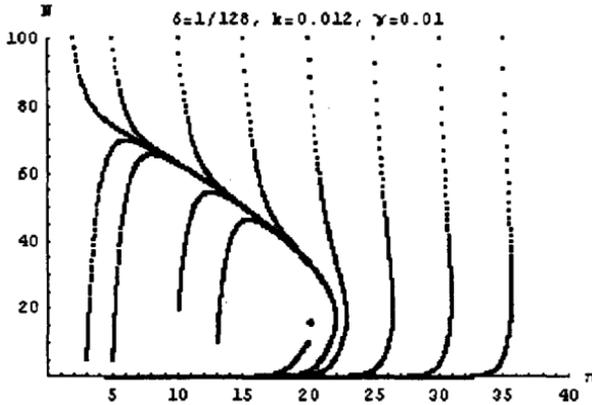


Figura 9. El punto fijo ocurre en (20.1536, 15.745) mostrando que todas las soluciones conducen a la eliminación de moscas.

En la figura 10, similar a los resultados de la figura 8, existen regiones donde se elimina la población de moscas y otras donde se dirigen hacia una población estable o punto de equilibrio.

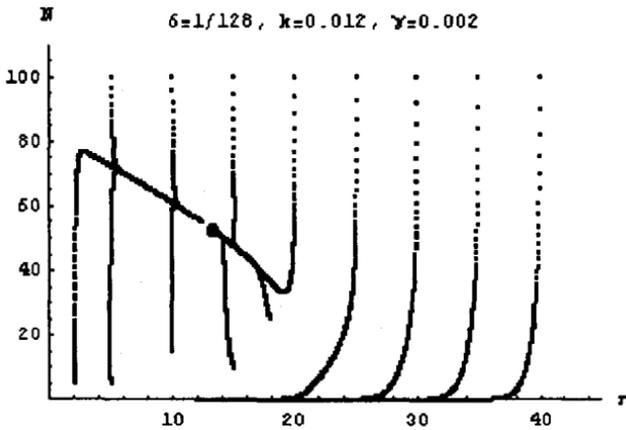


Figura 10. Retrato de fase con punto en (13.3905, 52.3067). En este caso existen condiciones para eliminar la población de moscas.

En el caso especial $\bar{N} = \bar{n}$, el retrato de fase de las soluciones se muestra en la figura 12, donde se vió que $\gamma = \delta$, resultando similar al caso anterior.

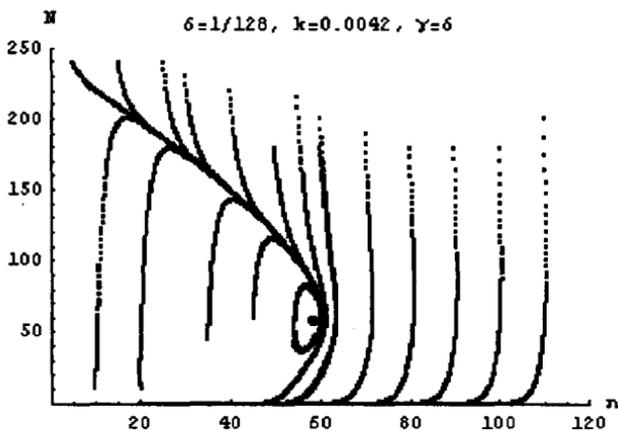


Figura 11. El punto fijo ocurre en (58.5938, 58.5938)

4 Conclusiones

En los dos modelos estudiados, se han encontrado condiciones iniciales donde es posible eliminar la población de moscas, cuya población inicial no es necesario que sea 100 veces menor que la de las moscas estériles, como recomienda, por ejemplo, la referencia [7]; sin embargo, hay que considerar que estos resultados son sólo ilustrativos y académicos, puesto que no han sido comparados con datos de campo o de laboratorio. De hecho, los dos modelos estudiados son muy sobre simplificados y modelos que reflejen lo más aproximado al comportamiento real deben elaborarse en base a modelos existentes y a las observaciones de campo.

Por otro lado, en la metodología matemática empleada, la determinación de los puntos donde la población de moscas se mantiene constante en el transcurso del tiempo, llamados generalmente puntos del equilibrio, son cruciales no sólo porque permiten conocer las condiciones bajo las cuales ocurren, sino porque las condiciones iniciales en torno de dichos puntos nos pueden o no conducir a la eliminación de la población de las moscas.

De hecho, el estudio realizado en el presente trabajo no es completo y tampoco es necesario que lo sea, a menos que se busque cotejar con

datos experimentales. Sin embargo, los detalles de la metodología se repetirán en estudios más refinados o realísticos, esperando que este trabajo contribuya en esa dirección.

Referencias

- [1] MURRAY, J. D. (1990). *Mathematical Biology*. Springer Verlag Berlin.
- [2] LEVIN, A. S. (1986). *Mathematical Biology*. Springer Verlag Berlin.
- [3] HALLAN, T. G., LEVIN, A. S. AND ROSS, L. J.. (1986). *Applied Mathematical Ecology*. Springer Verlag.
- [4] MAY, R. M. (1975). *Biological Populations Obeying Difference Equations: stable points, stable cycles, and chaos* Journal of Theoretical Biology, 51, 511 - 524.
- [5] FULFORD, G., FORRESTER, P. AND JONES, A.,(1997). *Modelling with differential and difference Equations*. Cambridge University Press.
- [6] UNSCH. (1999). *Separatas del seminario sobre la mosca de la fruta*.
- [7] INSTITUTO NACIONAL DE INVESTIGACIÓN Y PROMOCIÓN AGROPECUARIA, SERVICIO NACIONAL DE PROTECCIÓN INTEGRADA DE CULTIVOS Y OTROS. *Manual de Control Integrado de la Mosca de Fruta*. (No tiene fecha de publicación). Fondo de Cooperación técnica Perú - Argentina.
- [8] FOWLER, A. C.. (1996). *Mathematical Models in the Applied Sciencies*. Cambridge Universisty Press.
- [9] WOLFRAM, STEPHEN. (1989). *Matemática*. Addison- Wesley Publissing Company, Inc. USA.
- [10] DEVANEY, ROBERT, L. (1989). *An Introduction to Chaotic Dynamical Sitems*. Addison- Wesley Puublishing Company, Inc. USA.
- [11] PERKO, L. (1996). *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer Verlag New York.

- [12] HALE, J. AND KOCAC, H. (1991). *Dynamics and Bifurcations*. Springer Verlag New York.
- [13] HIRSCH, M. W. AND SMALE, S. (1974). *Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y álgebra lineal*. Alianza Editorial, Madrid.

Walter Mario Solano Reynoso
Departamento Académico de Matemática y Física
Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga,
Ayacucho, Perú
walmario@mizmail.com