Pro Mathematica Vol. XVII, N°33, 2003

MATEMÁTICA EN LA MUSICOLOGÍA

Emilio ***Lluis-Puebla***

Resumen

Este artículo es de carácter divulgativo, por lo cual, debido a lo heterogéneo del público lector he tratado de dejarle algo a cada quien, es decir, expondré conceptos de varios niveles. Primero asumiré un curso de Teoría de Grupos, luego presupondré un curso de Teoría de Categorías y finalmente asumiré conocimientos básicos de Teoría de Topos. También, he procurado, salvo en algunos casos específicos, escribir con palabras comunes algunos de los temas que expondré con el fin de ofrecerles un esbozo panorámico acerca de este tema. Disculpas a quienes desean leer una larga serie de teoremas y también disculpas a quienes prefieren no leer una larga serie de teoremas. Trataré de equilibrar la exposición.

Universidad Nacional Autónoma de México.

Actualmente es perceptible que en las últimas dos décadas del siglo pasado (y hasta la fecha) hubo una gran tendencia en la Matemática de realizar no sólo aplicaciones sino hacer Matemática en una gran variedad de campos del conocimiento, y el campo de la Música no ha sido la excepción, aunque ya se daba esto en la Música desde la época de Pitágoras. Después, en la Edad Media, la Música estaba agrupada con la Aritmética, la Geometría y la Astronomía en el Cuadrivio. La Música no se consideraba un arte en el sentido moderno sino una ciencia aliada con la Matemática y la Física (la Acústica).

Hay quienes insisten en el dogma de que la precisión y la belleza se contradicen una a la otra, y que la Matemática sólo produce tautologías y por lo tanto debe de fallar cuando apunta a conocimiento sustancial; para ellos no está dirigida esta plática y no deberían escuchar lo que sigue.

Es bastante desconocida la aplicación de conceptos matemáticos a la Musicología y en particular a la Teoría Matemática de la Música. A continuación veamos cómo algunos matemáticos y músicos han aplicado conceptos matemáticos en la Música y como se hace matemática nueva con estos conceptos.

Veamos un magnífico material de Dave Benson [1], Caps.1 y 9, (destacado matemático que ha realizado un enorme trabajo en Cohomología de Grupos, Representaciones, Topología Algebraica, entre otras ramas de la Matemática, quien tiene un excelente texto, no publicado aún, sobre Matemática y Música). Después veremos cómo este tipo de problemas pueden ser formulados y resueltos con un lenguaje sofisticado que establece precisión de los objetos musicales.

El sonido es el medio de transmisión de la Música y consiste de vibraciones del aire. Este último es un gas, cuyas moléculas y átomos no están tan juntos como en un sólido o líquido. Las ondas del sonido se clasifican como *longitudinales*. Tienen cuatro propiedades: la *amplitud* o el tamaño de la vibración o lo fuerte que se oye; la *nota o altura (pitch* en inglés) que podemos de manera provisional considerar como la frecuencia de vibración; el *timbre* que corresponde a la forma del espectro del sonido y la *duración*, que es el tiempo que dura un sonido.

El concepto de "*grupo*"es una estructura matemática que captura el concepto de "simetría". El *Teorema de Cayley* (todo grupo es isomorfo a un subgrupo de un grupo de permutaciones) nos explica el porqué los axiomas de la Teoría de Grupos capturan el concepto físico de "simetría". En otras palabras, dice que un grupo puede realizarse como un grupo de permutaciones de algún conjunto.

Consideren la escala musical usual de doce sonidos en la escala igualmente temperada. Podemos pensar los números del 0 al 11 como representantes de intervalos musicales en múltiplos de semitonos. Así, el 1 está representado por la permutación que incrementa un semitono a las demás, es decir, la permutación

$$\begin{pmatrix} do & do\# & re & mi & fa & fa\# & sol & sol\# & la & la\# & si & do \\ do\# & re & mi & fa & fa\# & sol & sol\# & la & la\# & si & do & re \end{pmatrix}$$

Es claro que la aritmética de $\mathbb{Z}/12$ (del tipo del reloj clásico) se convierte en equivalencia de octavas en la escala musical. Dos notas pertenecen a la misma clase de nota o altura si difieren por un número entero de octavas. Cada elemento de $\mathbb{Z}/12$ está representado por una permutación diferente de las doce clases de nota o altura, con el número i representando un incremento de i semitonos. Por ejemplo, el número 7 representa una permutación que hace cada nota una quinta más alta. Así, la suma se puede interpretar como la suma de intervalos musicales. Esta representación mediante permutaciones se parece al Teorema de Cayley, pero el hacer esto preciso requiere de escoger un punto de la octava. Escogeremos comenzar representando el *do* como el 0 y por lo tanto la correspondencia se convierte en

$$\begin{pmatrix} do & do\# & re & re\# & mi & fa & fa\# & sol & sol\# & la & la\# & si \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}.$$

Bajo esta correspondencia, cada elemento de $\mathbb{Z}/12$ se representa por la permutación de las doce notas de la octava dadas por el Teorema de Cayley. Se podría haber escogido cualquier entero positivo n y considerar escalas con igual número de divisiones de la octava y usar $\mathbb{Z}/n$ en lugar de $\mathbb{Z}/12$.

Recuerden que el número de generadores de $\mathbb{Z}/n$ está dado por aquellos números i tales que el máximo común divisor de i y n es 1. Tal número de posibles generadores se conoce como la *función de Euler* $\phi(n)$.

Para el caso $\mathbb{Z}/12$, $\phi(12) = 4$, siendo $1, 5, 7$ y 11 los generadores. En términos musicales, el hecho que 7 sea generador corresponde al hecho que todas las notas pueden obtenerse por quintas, en lo que se llama el *Círculo de Quintas* o de *Tonalidades Vecinas.*

Consideremos una sucesión de notas x de cualquier longitud y con repeticiones de notas si se desea. Una *transposición* de una sucesión de clases de notas por n semitonos es la sucesión $T^n(x)$ en la cual cada una de las clases de notas en x se incrementan n semitonos. Por ejemplo, si $x = 4\ 1\ 5\ 9$ entonces $T^5(x) = 9\ 6\ 10\ 2$. Una *inversión* $I(x)$ de una sucesión de notas x reemplaza cada clase de nota o de altura por su inverso, por ejemplo, si $x = 4\ 1\ 5\ 9$ entonces $I(x) = 8\ 11\ 7\ 3$. El *retrógrado* $R(x)$ de una sucesión de notas x reemplaza la sucesión por otra pero en orden inverso. Por ejemplo, si $x = 4\ 1\ 5\ 9$ entonces $R(x) = 9\ 5\ 1\ 4$.

La relación entre las operaciones T, I, R están dadas por

$$T^{12}(x) = e, T^nR = RT^n, T^nI = IT^{-n}, RI = IR.$$

Hay cuatro formas de sucesión de notas x. La *forma prime* es la original o cualquiera de sus transposiciones $T^n(x)$. La *forma de inversión* la cual es cualquiera de las $T^nI(x)$. La *forma retrógrada* que es cualquiera de las $T^nR(x)$ y la *forma inversión retrógrada* que es cualquiera de las $T^nRI(x)$. Las operaciones T^n $(0 \leq n \leq 11)$ forman un grupo cíclico $\mathbb{Z}/12$. La operación en R junto con la operación identidad forman un grupo cíclico $\mathbb{Z}/2$. Las operaciones T y R conmutan. El grupo cuyos elementos son las operaciones T^n y T^nR es isomorfo a $\mathbb{Z}/12 \times \mathbb{Z}/2$. Las operaciones T e I no conmutan pero satisfacen la relación $T^nI = IT^{-n}$ el cual describe el *grupo diédrico.* Así, las operaciones T^n y T^nI forman un grupo isomorfo al grupo diédrico D_{24}. Juntando todo esto, el grupo cuyos operaciones son

$$T^n, T^nR, T^nI, T^nRI$$

forman un grupo $D_{24} \times \mathbb{Z}/2$.

El grupo $\mathbb{Z}/12$ actúa en el conjunto de sucesión de notas de una cierta longitud vía las operaciones T^n. Dos sucesiones de notas están en la misma órbita exactamente cuando una es transposición de la otra. Recuerden que un grupo actúa transitivamente en un conjunto si solamente hay una órbita para dicha acción. Por ejemplo, $\mathbb{Z}/12$ actúa transitivamente en el conjunto de doce clases de notas, pero no así en el conjunto de sucesiones de notas de longitud mayor que uno.

Como una sucesión de notas consiste de doce posibles clases de notas en algún orden, el número total de sucesiones de notas es $12! = 479001600$. Podemos considerar dos sucesiones de notas como equivalentes si una puede obtenerse de la otra utilizando las operaciones T^n, I, R, sin embargo algunas sucesiones de notas permanecerán fijas por elementos del grupo. Así que el problema del conteo se degenera en muchos casos especiales a menos que utilicemos una mejor manera de contar. Esta la provee el Teorema de Burnside que dice que el número de órbitas de G en X es $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} n(g)$ donde $g \in G, n(g)$ es el número de puntos fijos de g en X. Si queremos contar el número de sucesiones de notas donde dos sucesiones de notas son equivalentes si una puede obtenerse de la otra utilizando las operaciones T^n, I, R entonces estamos contando el número de órbitas del grupo $G = D_{24} \times \mathbb{Z}/2$ generado por T, I, R sobre el conjunto X de sucesiones de notas. Para aplicar el Teorema de Burnside debemos calcular el número de sucesiones de notas fijos para cada operación en el grupo. Se tiene que la suma sobre $g \in G$ del número de puntos fijos de g en X es

$$479001600 + 7(46080) = 479324160$$

y dividiendo entre $\mid G \mid = 48$, el número total de órbitas de G en sucesiones de notas es 9985920. Esto es:

Teorema 1. *(David Reiner (1985)) Si dos sucesiones de notas de doce se consideran equivalentes cuando una puede obtenerse de la otra utilizando las operaciones T, I, R entonces el número total de sucesiones de notas es* 9985920.

Ahora, por ejemplo, consideremos problemas más complicados. Supongamos que deseamos saber cuántos acordes de tres sonidos de las doce clases de notas hay. Aún más, supongamos que dos acordes son equivalentes si uno se puede obtener del otro mediante la operación T^n para alguna n. En una forma general, las *configuraciones* que estamos contando pueden considerarse como funciones de un conjunto X en otro Y, y el grupo simétrico G actúa en el conjunto X.

Sea X es el conjunto de las 12 notas y Y el conjunto $\{0, 1\}$. Un acorde corresponde a una función que lleva las notas del acorde al valor

1 y las restantes al valor 0. Esto da una correspondencia biyectiva entre los acordes y las funciones de X en Y. Escribimos Y^X para denotar el conjunto de configuraciones, o funciones de X en Y. El problema general consiste en encontrar el número de órbitas de G en configuraciones. La acción de G en Y^X está dada por

$$g(f)(x) = f(g^{-1}(x)).$$

El problema general consiste en encontrar el número de órbitas de G en configuraciones. Para ello se define el *índice del ciclo* del grupo G como

$$P_G(t_1, t_2, ...) = \frac{1}{\mid G \mid} \sum_{g \in G} P_g(t_1, t_2, ...) = \frac{1}{\mid G \mid} \sum_{g \in G} t_1^{j_1(g)} t_2^{j_2(g)} ...$$

donde $t_1, t_2, ...$ son variables, $\sum_{g \in G} P_g(t_1, t_2, ...) = t_1^{j_1(g)} t_2^{j_2(g)}$...es el *índice del ciclo* de G en X donde $j_k(g)$ denota el número de ciclos de longitud k en la acción de G en X. Es decir, es el promedio del índice del ciclo de G en X.

Por ejemplo, se sabe que para el grupo diédrico D_{2n} que actúa en los n vértices de un polígono regular de n-lados se tiene que dividir el cálculo en dos casos, para n par o impar. Si $n = 2m + 1$ es impar, se tiene

$$P_{D_{4m+2}} = \frac{1}{2} P_{\mathbb{Z}/(2m+1)} + \frac{1}{2} t_1 t_2^m$$

pues cada reflexión tiene un solo punto fijo. Si $n = 2m$ es par, se tiene

$$P_{D_{4m}} = \frac{1}{2} P_{\mathbb{Z}/(2m)} + \frac{1}{4} t_2^m + t_1^2 t_2^{m-1}$$

pues la mitad de las reflexiones no tienen puntos fijos y la otra mitad tiene dos. Podemos asignar *pesos* a cada elemento de Y. Los pesos pueden ser cualquier clase de cantidades que puedan sumarse y multiplicarse y formar un anillo conmutativo. Los pesos pueden ser variables formales independientes, o podemos escoger una de ellas igual a 1 para simplificar el álgebra. El *peso de una configuración* es $w(f) = \prod_{x \in X} w(f(x))$ es decir, es el producto sobre los elementos de X del peso de $f(x)$. Los pesos de dos configuraciones en la misma órbita de la acción de G son iguales. Ahora formamos una serie de potencias llamada *serie de conteo de una configuración* C como la suma, sobre todas las órbitas de G en el conjunto de configuraciones Y^X, del peso de un representante de la órbita. En el caso que estamos considerando introducimos solamente una variable z y establecemos $w(0) = 1$ y $w(1) = z$. Luego, el coeficiente de z^a nos indicará acerca de los acordes con a notas. Recordemos el *Teorema de Pólya*: La serie de conteo de una configuración C está dada en términos del índice del ciclo de G en X por la fórmula

$$C = P_G\left(\sum_{y\in Y} w(y), \sum_{y\in Y} w(y)^2, \sum_{y\in Y} w(y)^3, \ldots\right)$$

Así, si consideramos en nuestro caso $G = \mathbb{Z}/12$ y $G = D_{24}$ con X el conjunto de las 12 clases de notas, $Y = \{0,1\}$, $w(0) = 1$ $w(1) = y$, obtenemos

$$P_{\mathbb{Z}/12} = \frac{1}{12}\left(t_1^{12} + t_2^6 + 2t_3^4 + 2t_4^3 + 2t_6^2 + 4t_{12}\right)$$

$$P_{D_{24}} = \frac{1}{24}\left(t_1^{12} + 6t_1^2t_2^5 + 7t_2^6 + 2t_3^4 + 2t_6^2 + 4t_{12}\right)$$

Entonces, por el Teorema de Pólya debemos sustituir $1 + z^n$ por t_n para obtener la serie de conteo de configuraciones C, que da lo siguiente: para el caso $G = \mathbb{Z}/12$ se tiene

$$C = 1+z+6z^2+19z^3+43z^4+66z^5+80z^6+66z^7+43z^8+19z^9+6z^{10}+z^{11}+z^{12}.$$

Así que hay 19 acordes de tres notas salvo transposición. Si $G = D_{24}$ entonces

$$C = 1+z+6z^2+12z^3+29z^4+38z^5+50z^6+38z^7+29z^8+12z^9+6z^{10}+z^{11}+z^{12}.$$

Así que hay 12 acordes de tres notas y 50 hexacordes salvo transposición e inversión. La razón de que estos coeficientes polinomiales sean simétricos es la de que un acorde puede reemplazarse por su complemento para dar una correspondencia natural entre los acordes de n notas y los de $12 - n$ notas.

La combinatoria de la música de 12 tonos ha dado lugar a una curiosa coincidencia. Olivier Messiaen, en su "*Île de feu 2*" para piano solo casi reinventa el grupo de Mathieu M_{12}. Messiaen usa las permutaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 7 & 6 & 8 & 5 & 9 & 4 & 10 & 3 & 11 & 2 & 12 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 6 & 7 & 5 & 8 & 4 & 9 & 3 & 10 & 2 & 11 & 1 & 12 \end{pmatrix}$$

para generar sucesiones o secuencias de tonos y sucesiones o secuencias de duración. Estas permutaciones generan el grupo M_{12} de orden $95,040$ descubierto por Mathieu alrededor de 1865.(Uno de los grandes logros del siglo XX fue la clasificación de los grupos finitos simples que dice en breves palabras que los dichos grupos caen en ciertas familias infinitas que pueden ser explícitamente descritas, con la excepción de 26 grupos llamados *esporádicos*. Cinco de ellos fueron descubiertos por Mathieu en el siglo XIX y los restantes en los años sesenta y setenta del siglo pasado).

A continuación tengo que hablarles un poco acerca de lo que es la Musicología y su estado pasado y presente. *Musicología* es el nombre adoptado del francés "musicologie" para referirse al estudio escolástico de la Música. Del alemán "musikwissenschaft" que significa "ciencia de la Música". [2] p558. Hacer musicología no es fácil. La Musicología carece de un marco conceptual estable. Se dice que es muy difícil comenzar a hacer musicología y navegar sobre un marco conceptual seguro. En la musicología tradicional existe el problema estándar del encapsulamiento. Se da un postulado encapsulado y se previene de cualquier acceso a la (presunta) complejidad escondida. En la Matemática, el acceso a la complejidad es posible y su realización eventualmente da penetración en el concepto mientras que en el encapsulamiento musicólogico los intentos apuntan al vacío, generalmente mediante el rompimiento del flujo de la información mediante un oscuro camino que pretende ser racional, ornamentado con metáforas, transformando un posible concepto profundo en un concepto misterioso, es decir, transformando ciencia en fábula. En uno de los libros de musicología tradicional más ambiciosos, los discursos de las partes importantes se basan en un listado casi infinito de referencias externas. Afortunadamente, el cubo topográfico ofrece una herramienta compleja que puede proporcionar profundidad del tipo del que se cuenta en la Matemática. Por lo tanto, la Musicología debe de tener ante todo, libre acceso a la complejidad encapsulada: no es posible cultivar regiones del conocimiento privado e inaccesible.

Uno de los propósitos de la Teoría Matemática de la Música es la de establecer dicho marco conceptual estable, definiendo los conceptos en una forma precisa. Sin embargo, no trataremos con la realidad completa de la Música, tal y como aparece en los contextos psicológicos, fisiológicos, sociales, religiosos o políticos. Veremos a continuación las actividades fundamentales relacionadas con la Música y luego su fundamento en campos científicos de investigación establecidos.

La Música tradicionalmente descansa en una conexión fuerte entre facticidad artística y reflexión intelectual. En muchas ciencias y aún artes, tal entrelazamiento es un aspecto exótico, pero la musicología tiene que tratar con ambas haciéndola un caso muy especial. Las cuatro actividades relacionadas con la Música son: producción, recepción, documentación y comunicación. Las podemos visualizar en una figura de tetraedro y por supuesto, no es la única clasificación posible, pero son suficientemente grandes para mostrar la inmensa variedad de perspectivas cuando tratamos con la Música. Cada actividad tiene una importancia de por sí pero es cuando están juntas que son las necesarias para comprender el fenómeno musical.

Los dominios fundamentales científicos requeridos para relacionar las actividades descritas incluyen la Semiótica, la Física, la Matemática y la Psicología.

Definiremos provisionalmente a la *Música* como un sistema de signos, compuestos de formas complejas, que pueden ser representados por sonidos físicos y que de esta manera median entre contenidos mentales y psíquicos. Así, se recurre a la Semiótica. Para describir estas formas la Matemática es el lenguaje adecuado. Para representar estas formas en el nivel físico, la Física es indispensable y para entender el contenido psíquico, la Psicología es la ciencia requerida. De ninguna forma se pretende crear un esquema reduccionista de la realidad musical, sino que se busca ubicar a la Musicología en el mismo lugar que ocupa cualquier área de investigación, sea de las Ciencias Naturales o de las Humanidades, y acabar con el aura de misticismo y la fuerte recurrencia a la subjetividad que, en lo tocante a nuestro tema, se invocan con frecuencia. Tenemos una representación mediante el tetraedro imaginario descrito anteriormente para visualizar en forma sinóptica la situación general donde contestar a la pregunta ¿de qué se trata la Música? puede comenzarse.

Es fundamental enfatizar que, mientras quien emplee métodos matemáticos, lógicos o computacionales en la Música no tiene que ser docto en la Filosofía de la Música, sí es necesario que tenga una orientación dentro de la compleja ontología de este arte. Tanto en la Música como en otras áreas del conocimiento se ha atestiguado cómo la precisión de la Mátemática, más un conocimiento deficiente acerca de la ontología del área de aplicación, provoca un dogmatismo; injustamente, se le suele responsabilizar a la Matemática por este problema, y no cuestionar la falta de capacidad de hacer nexos de quien la aplica.

La TMM ofrece un modelo ontológico con un carácter flexible y abierto a modificaciones. Se intenta aportar un ."sistema" de coordenadas para localizar problemas dentro del proceso de hacer Musicología. Se propone desde un principio formular un sistema tridimensional que nos permita decir dónde vive el concepto de la Música, y qué se conoce como la Topografía de la Música. Las coordenadas son:

1. *Realidad*;
2. *Comunicación*;
3. *Semiosis.*

Veamos estas coordenadas con un poco más de detalle.

1. *La Realidad* de la Música es física, psicológica y mental. En el nivel fisico se trata de un fenómeno acústico, en tanto en su nivel mental se trata de la partitura como una abstracción. Como realidad psíquica, la Música expresa los estados emocionales de sus creadores y afecta emocionalmente al escucha.
2. *La Comunicación* de la Música pasa por tres instancias: el nivel del creador, o lo que se conoce como la *poiesis*, seguido por el nivel neutral que es la obra en sí. El nivel estético del escucha es la instancia que percibe al ser interpretada una obra. Desde el momento en que una obra musical es creada, la existencia del creador es fija; en cambio, el número de escuchas e intérpretes crece constantemente.
3. Como la Música es uno de los sistema no-lingüísticos más desarrollados de signos, la *Semiosis* juega un papel en la ubicación de su ontología. Se enfatiza que la Música no se interpreta como un tipo de lenguaje; al contrario, se señala que hay diferencias significativas entre un sistema musical y uno lingüístico. Sin embargo, se describe la Semiótica de la Música desde la perspectiva de la

Semiología Estructuralista de Roland Barthes como una generalización de la teoría lingüística de Ferdinand de Saussure. Para no desviarnos del propósito de este esbozo, no podremos ahondar en este aspecto tan interesante. Sólo mencionaremos que un sistema es semiótico si se articula según una estratificación fundamental de signos en su significante, significación y significado, donde el significante (los morfemas, o sea, la mínima forma significativa) llega al profundo del mensaje, el significado, por medio de las relaciones de la significación.

Todo lo anterior señala que una ubicación ontológica de la Música puede interpretarse como un Punto en un cubo tridimensional generado por los ejes de realidad, comunicación y semiosis, cada uno, a su vez, articulado en tres valores:

- *Realidad*: física, psíquica, mental;
- *Comunicación*: creador, obra, escucha;
- *Semiosis*: significante, significación, significado.

Así como tenemos el cubo topográfico de la ontología musical, que consiste en un conjunto de $3^3 = 27$ posibles ubicaciones topográficas como puntos. Pero cualquier objeto general puede ubicarse en cualquier subconjunto del cubo, y los 27 puntos son sólo ubicaciones elementales, a partir de las cuales se componen ontologías más complejas. Véase [3], pág.20.

Mazzola resume contundentemente lo expuesto: "Es equivocado creer que la Música es un asunto especial de la ciencia porque se trata de objetos que apuntan a un estrato no mental de la realidad. La Psicología, por ejemplo, estudia emociones, la Física estudia partículas elementales. Todos estos objetos comparten aspectos que trascienden la conceptualización humana. Pero podemos concebirlos en un sistema cognoscitivo y modelar su comportamiento con un éxito impresionante para nuestra capacidad de comprensión. La Música no es ni más ni menos accesible que la Física. Pero tenemos que establecer un sofisticado sistema de signos para poder aprehender su significado; el lenguaje común no es la herramienta para el espacio conceptual de la Música."

Deseo comunicarles que está por aparecer a fines de este mes el más reciente libro de Guerino Mazzola, del cual tengo el honor de ser uno de los colaboradores. Podemos apreciar que el mismo título de la obra, *The Topos of Music*, posee un doble sentido. Por un lado está la palabra griega topos, que significa lugar y que sugiere la ubicación del concepto de la Música como un tópico, en el sentido de Aristóteles y Kant. Por otro lado, se hace referencia a la teoría matemática de Topos que sirve para reflejar el sistema de signos musicales, esto es, la Música en su faceta de un sistema abstracto cuya estructura puede permanecer escondida sin un marco adecuado de comprensión. Este doble significado expresa, de hecho, la intención de unificar una profundización filosófica con la precisión de la Matemática, en torno a la Musicología. La Música está enraizada con realidades físicas, psicológicas y semióticas. Pero la descripción formal de las instancias musicales corresponde al formalismo matemático.

La Teoría Matemática de la Música está basada en las Teorías de Módulos y Categorías, en la Topología Algebraica y Combinatoria, en la Geometría Algebraica, Teoría de Representaciones. Su propósito es el de describir las estructuras musicales. La filosofía detrás de ella es la de comprender los aspectos de la Música que están sujetos al raciocinio de la misma manera en que la Física puede hacerlo de los fenómenos propios del trabajo científico.

Esta teoría está basada: en un lenguaje adecuado para manejar los conceptos relevantes de las estructuras musicales, en un conjunto de postulados o teoremas con respecto a las estructuras musicales sujetas a las condiciones definidas y, en la funcionalidad para la composición y el análisis con o sin computadora.

Mazzola, en un magnífico artículo panorámico, "Towards Big Science" cita los elementos de Pierre Boulez de un programa de los años sesenta que tiene la intención de que las artes y la ciencia se reconcilien. (Yo diría que los artistas y los científicos). Con este postulado, la invocación de Boulez acerca de la "real imaginación" solamente puede ser concebida mediante la realización virtual (esencial) del sistema complejo teórico y práctico de la Música, de sus sonidos y relaciones mediante la tecnología informática de hoy.

La Música es una creación central de la vida y pensamiento del ser humano. Que actúa en otra capa de la realidad que la Física. Creemos que el intento de comprender o de componer una obra de gran envergadura en la Música es tan importante y difícil como el intento de unificar la gravitación, el electromagnetismo, las fuerzas débiles y fuertes. De seguro, las ambiciones son comparables, y por lo tanto, las herramientas deben de ser comparables.

Mazzola concuerda con Boulez acerca de que "la Música no puede degenerar o reducirse a una sección de la Matemática: la Música está fundamentalmente enraizada con las realidades físicas, psicológicas y semióticas. Pero requerimos más métodos sofisticados además de los datos empíricos y estadísticos para describir formalmente las instancias musicales.

En los años ochenta, Mazzola observó que las estructuras musicales son estructuras globales pegadas con datos locales. Mazzola utilizó la selección de una cubierta como atlas, la cual es parte del punto de vista en el sentido de Yoneda y Adorno. Las cartas se llaman composiciones locales y consisten (vagamente) de subconjuntos finitos K de módulos M sobre un anillo R. Estas cartas K se pegan y comparan mediante isomorfismos de los módulos subyacentes. Tales objetos globales, los cuales generan diferentes categorías se llaman composiciones globales. Éstos son los conceptos estudiados en lo que ahora se conoce como la Teoría Matemática Clásica de la Música.

Mazzola menciona tres paradigmas mayores de la Matemática y Musicología que han ocurrido durante los 150 años que han sido paralelos en la evolución de ambas y la creciente presencia de la Matemática en la Música. Estos son: *las estructuras globales*, *las simetrías* y la *Filosofía de Yoneda.*

La primera quiere decir, en palabras, que las estructuras localmente triviales se pueden juntar en configuraciones estéticas válidas si éstas se pegan de una manera no trivial.

La segunda, las simetrías (y los fractales) son utilizadas en la composición, aparecen también en la Naturaleza y en la Matemática juegan un papel crucial como también en la Física.

En cuanto a la tercera: la Filosofía de Yoneda, en palabras dice que, para comprender un objeto, dé vueltas alrededor de él. Esto quiere decir, entendimiento mediante el cambio de perspectivas. En Matemática, este Lema de Yoneda tiene importantes aplicaciones en el Álgebra Homológica, en la Topología Algebraica y en Geometría Algebraica solamente para mencionar algunas. Dice que un objeto matemático puede clasificarse salvo isomorfismo por su funtor. En Música, la partitura es solamente su primera vista y junto con todas sus interpretaciones constituyen su identidad. ¡Qué maravilloso punto de vista para ambos, intérprete y audiencia. Deja de lado la estúpida competencia fuera del arte y la ciencia como si fueran juegos olímpicos.

Recientemente, en su artículo "Status Quo 2000", (el cual hemos apreciado mucho que fuese presentado en México durante una exposición plenaria espléndida en Saltillo hace dos años), explica por qué el acercamiento mediante su modelo teórico geométrico de ese tiempo evolucionó a un marco que es apropiado para muchos problemas musicales. Este nuevo marco está basado en Matemática más sofisticada como la Teoría de Topos.

Me han solicitado que diga unas palabras acerca de la Teoría de Topos ya que muchas personas quizás nunca hayan oído hablar de ella, así que abro un paréntesis para platicar un poco acerca de la Teoría de Topos.

Siguiendo la inmejorable y bella introducción de Mac Lane-Moerdijk de su libro sobre Gavillas en Geometría y Lógica les comento que el aspecto más sobresaliente de la Teoría de Topos es el de unificar dos aparente y completamente distantes campos de la Matemática: por un lado la Topología y la Geometría Algebraica y por otro, la Lógica y la Teoría de Conjuntos.

Un topos puede considerarse como un "espacio generalizado" y a la vez como un "universo generalizado de conjuntos". Esto surgió en 1963 independientemente, de los trabajos de Grothendieck (reformulación de la Teoría de Gavillas para Geometría Algebraica), de Lawvere (en su búsqueda por axiomatizar la categoría de conjuntos), y de Paul Cohen (en el uso del "forcing" para nuevos modelos de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel).

Vagamente, una gavilla de grupos abelianos A sobre un espacio topológico X es una familia de grupos abelianos A_x, parametrizados por los puntos $x \in X$ de una manera "continua" adecuada.

Para Grothendiek, la Topología se convirtió en el estudio de (la cohomología de) gavillas, y las gavillas "situadas" en una topología de

Grothendieck dada forman un topos, llamado *topos de Grothendieck.*

Las categorías (1945) y los funtores adjuntos (1957) entre ellas, son el lenguaje para entender la Teoría de Topos.

Recuerden los conceptos de categoría, funtor, transformación natural y de adjunto izquierdo, vea mi libro sobre Álgebra Homológica.

Las categorías, inicialmente una manera adecuada para formular sucesiones exactas, la "caza de elementos en diagramas" y la homología axiomática para la topología, adquirieron vida independiente.

En 1963 Lawvere se propuso establecer un fundamento puramente categórico de toda la Matemática, comenzando con una axiomatización apropiada de la categoría de conjuntos, reemplazando el concepto de pertenencia con el de composición de funciones.

Casi al mismo tiempo, Tierney observó que el trabajo de Grothendieck podía conducir a una axiomatización del estudio de gavillas. Después, trabajando juntos lograron una axiomatización efectiva de las categorías de gavillas de conjuntos (y en particular de la categoría de conjuntos) vía una formulación apropiada de las propiedades del tipo de los conjuntos.

Así definieron, de una manera elemental, sin suposiciones acerca de los conjuntos, el concepto de topos elemental. La definición original se transformó en una axiomatización de una hermosa y asombrosa simplicidad: un *topos elemental* es una categoría con límites finitos, objetos función Y^X (definidos como adjuntos) para cualesquiera dos conjuntos X, Y, y un objeto potencia $P(X)$ para cada objeto X; se requiere que cumplan ciertas axiomas básicos. Invito a ustedes a adentrarse en este maravilloso tema en el libro de Mac Lane-Moerdijk.

Con respecto a la Interpretación, Mazzola comenta en sus artículos que, "la Música ha sido estudiada desde el punto de vista de la Estética y la Psico-Fisiología". Trabajó en desarrollar una Teoría de la Interpretación que describe las estructuras y procesos que definen una interpretación, "aquella que sin las herramientas adecuadas, la Teoría de la Interpretación permanecerá" (y me encanta esta frase) "como una rama de la Literatura en el espíritu de la Crítica Musical". Pero con esta posibilidad de exhibir variedades algebraicas gramaticales tiene una consecuencia profunda para el problema de la clasificación de interpretaciones. Así, el criticismo comparativo se convierte en un campo preciso de investigación y no más un sector de la literatura.

Recientemente, Mazzola produjo una clasificación de objetos musicales, esto es, "existe un esquema algebraico cuyos puntos racionales representan ciertas clases de isomorfismo de composiciones globales". "Clasificar quiere decir la tarea de comprender totalmente un objeto. Esto es el Lema de Yoneda en su completa implicación filosófica". El comprender obras de arte quiere decir, sintetizar todas sus perspectivas interpretativas.

Veamos una probadita de lo que es un Denotador. El material que expongo a continuación es tomado de [3] de G.Mazzola y de la Tesis de Maestría de mi alumna Mariana Montiel [4] quien desarrolló y creó algunos aspectos de esta teoría en colaboración con G. Mazzola.

Un aspecto de motivación fundamental para el desarrollo del concepto matemático llamado *Denotador*, es la *navegación*, el cual esbozo brevemente a continuación.

El conocimiento consiste en dos elementos fundamentales: información y organización mental. La información sola, sin un sistema de "coordenadas" que permita ubicarla y recogerla cuando sea necesario, no es conocimiento. Por este motivo, el paradigma de la información puramente digital, Z_2, ($\{0,1\}$, "off" y "on", etc.) nada tiene que ver con el conocimiento. Es así que se precisa de un sistema de conceptos que provea un método completo de "*navegación*" y que funcione en un espacio de conceptos exhaustivo. El problema estriba en cómo realizar una arquitectura tal de conceptos sin perder rigor y confiabilidad. El *Denotador* pretende ser la solución a este planteamiento.

El *espacio del conocimiento enciclopédico=Encicloespacio* se plantea como la actualización del concepto tradicional de *enciclopedia* (del griego *enkyklos paidea*=enseñanza en círculo), originalmente desarrollado por Diderot y D'Alembert en el Siglo de las Luces. Con el advenimiento de la computadora personal, esta actualización exige un dinamismo en la estructuración de datos en el espacio-tiempo, en contraposición al contexto estático de antes, así como una relación interactiva con esta estructuración de información. Asimismo, el orden alfabético de la enciclopedia clásica, adecuada para sus volúmenes de textos, se generaliza a la orientación que impone la *navegación* (de "navigare" y este de "navis"=nave y "agere"=agitar, originalmente una actitud activa y no pasiva). En este sentido, el orden alfabético, adecuado para la enciclopedia de la sala, tiene que ser complementado por órdenes relacionados con presentaciones de datos que no son textos (espacios geométricos, colecciones de conjuntos, etc.).

La navegación tiene dos vertientes: navegación receptiva, más apegada a la enciclopedia clásica, en la que el encicloespacio no se modifica, y navegación productiva, donde hay interacción con el Encicloespacio y se agrega conocimiento al ya existente.

Hay tres características de la enciclopedia que son, realmente, principios de la tipología de formatos universales de datos: *unidad, completez y discursividad.* A cada uno de estos principios hay un aspecto que le corresponde al Denotador. La *unidad* en la creación de conceptos se realiza por medio de construcciones recursivas; la *completez* se logra por la ramificación extensiva de estas construcciones y la *discursividad* se tiene por la libre construcción y recombinación de denotadores. En contraposición a los sistemas comunes de bases de datos, en el trabajo con denotadores no hay ningún conjunto fijo de posibles construcciones.

El concepto llamado *Denotador* permite describir los objetos musicales. Los Denotadores están concebidos de acuerdo con los criterios de navegación en el Encicloespacio y por lo tanto se usa la metodología de navegación, incluyendo la navegación matemática. La fundamentación filosófica de este concepto es muy interesante pero será motivo de otra charla.

Consideremos **Mod** la categoría de Λ-módulos con Λ un anillo variable cuyos morfismos son los homomorfismos diafines. Denotemos con $\mathbf{Mod}^{@}$ la categoría de funtores contravariantes $Fu : \mathbf{Mod} \to \mathbf{Sets}$ de la categoría de módulos **Mod** en la categoría de conjuntos **Sets**.(Aquí estamos considerando el axioma de MacLane y podemos considerar la categoría **Sets** como un universo que contenga a **Mod**). Para funtores $Fu \in \mathbf{Mod}^{@}$ un módulo M del dominio de Fu se llamará *dirección o ubicación de* Fu, y un morfismo de módulos $f : M \to N$ se llamará *cambio de ubicación o dirección.* $@M$ denotará los funtores $Mod(\_, M)$ y $M@Fu$ denotará $Fu(M)$. $A@F$ es $F(A)$, es decir, la evaluación del funtor en la dirección ("at" the address) A, donde $A \in \mathbf{Mod}$. Aún más, la categoría de pregavillas $\mathbf{Mod}^{@}$ es un topos. Por lo tanto $\mathbf{Mod}^{@}$ tiene un clasificador de subobjetos que denotaremos con Ω.

Las construcciones que haremos (con excepción del producto fibrado en la categoría denotada **Loc** que definiremos más adelante) no recurren a la especificidad de $\mathbf{Mod}^{@}$, es decir, a la categoría **Mod**, y podrían, en un momento dado, generalizarse a una categoría de pregavillas cualquiera.

La recursividad es parte indisoluble tanto de Formas como de Denotadores. Una Forma se define en función de una Forma previa, o de la Forma previa se desprende una Forma nueva.

Definición 1. *Una* Forma F *es una lista de cuatro elementos,*

$$(NF, TF, CF, IF)$$

donde

(i) NF es una cuerda de caracteres ASCII llamada el *Nombre de la Forma*;

(ii) TF es uno de los símbolos:

1. **Simple**,
2. **Syn**,
3. **Power**,
4. **Limit**,
5. **Colimit**,

llamado *Tipo de la Forma;*

(iii) CF es uno de los siguientes objetos:

1. Para **Simple**, CF es un módulo,
2. Para **Syn** y **Power**, CF es una Forma, (Aquí se comienza a ver la recursividad en la definición.)
3. Para **Limit** y **Colimit**, CF es un diagrama de Formas, (El diagrama de Formas es un diagrama en la categoría $Mod^{@}$, donde los vértices son los funtores, $Fun(F)$, de la Forma F en particular. De hecho, los morfismos en la categoría de Formas son los morfismos (transformaciones naturales) entre los funtores $Fun(F)$.) llamado *Coordinador de la Forma,*

(iv) IF es un monomorfismo de funtores, $IF : Fun(F) \rightarrow X$; $IF \in \mathbf{Mod}^{@}$, cuyo contradominio X se relaciona con TF de la siguiente manera:

1. Para **Simple,** $X = @M$, donde M es el Coordinador de la Forma;
2. Para **Syn,** $X = Fun(CF)$, (es decir, el funtor del Coordinador de F que es, a su vez, una Forma);
3. Para **Power,** $X = \Omega^{Fun(CF)}$, (es decir, el objeto potencia $P(Fun(CF))$, correspondiente al objeto $Fun(CF) \in \mathbf{Mod}^{@}$, que es una generalización del conjunto potencia en **Sets,**
4. Para **Limit,** $X = Limit(D)$, donde D es un diagrama de Formas;
5. Para **Colimit,** $X = CoLimit(D)$.

IF se llama *Identificador de la Forma.* Su dominio $Fun(F)$ es el *funtor de la Forma*, también llamado *funtor del espacio de la Forma.*

La notación para una Forma F es

$$Name \rightarrow_{Identifier} Type(Coordinator)$$

Este concepto tiene que ver en su parte del Identificador con el problema de darle formalismo al software Predi-Base. Tanto el Coordinador como el Identificador comparten la Circularidad, es decir están abiertos a definiciones circulares.

La Forma debe entenderse, de manera intuitiva, como el espacio donde vive el Denotador. Al mismo tiempo, el Denotador debe concebirse como un punto en ese espacio, ¡si bien este punto lleva su espacio consigo! Asimismo, la definición de Denotador también tiene una estructura recursiva, similar a la definición de Forma.

Definición 2. *Consideremos una ubicación o dirección $M \in$* **Mod**. *Un* Denotador *con ubicación o dirección M es una lista de tres elementos,* (ND, FD, CD)

donde:

(i) ND es una cuerda de caracteres ASCII, llamado *Nombre del Denotador*;

(ii) FD es una Forma, la *Forma del Denotador*;

(iii) CD es un elemento de $M@Fun(F(D))$ y se llama *Coordenadas* (plural) *del Denotador.*

Un Denotador D con Forma F se simboliza así:

$N(D)$: $Address \rightsquigarrow_{Identifier} Type(Coordinator)(Coordinates)$

Hay muchísimas consideraciones y reflexiones acerca de estos dos conceptos así como resultados matemáticos interesantes pero sería imposible mencionarlas en esta conferencia. Solamente diré que la Forma de un Denotador abarca toda la información recursiva acerca de él. De hecho, es el funtor de la Forma, $Fun(FD)$, que determina las Coordenadas del Denotador.

Definamos los objetos de la categoría **Loc**; dichos objetos son un tipo de Denotador, llamado composición local. La composición local posee una estructura indescomponible que, en la Teoría Matemática de la Música, se conoce como "elemental".

Definición 3. *Una* composición local *es un Denotador* $D : A \rightsquigarrow F(y)$, *con* $A \in$ **Mod**, *cuya Forma* F *es de tipo* **Power**. *El Coordinador* CF *de* F *se llama el* espacio ambiente *de* D *y sus Coordenadas se llaman su* soporte.

Definición 4. *Una composición local* D *se llama* objetiva *si* $y \in 2^{Fun(CF)}$, *es decir, si existe* $Y \subset A@Fun(CF)$, *con* $y = \hat{Y} \subset @A \times Fun(CF)$. *En este caso* Y *también se llamará el soporte de* D. *La* $Card(D)$ *de un Denotador objetivo es la cardinalidad de su conjunto de Coordenadas,* Y.

Definición 5. *Una composición local que no es objetiva, se llama* funtorial. *Así es que, una composición local funtorial es un subfuntor:* $Z \hookrightarrow @A \times Fun(CF)$, *y una composición local objetiva es un subconjunto:* $Y \hookrightarrow A@Fun(CF)$.

Definición 6. *La categoría* **ObLoc** *consiste en el conjunto* ${}_0$**ObLoc** *de todas las composiciones locales objetivas. El conjunto* ${}_1$**ObLoc** *de morfismos es la unión disjunta de los conjuntos* **ObLoc**(L_1, L_2) *de los morfismos* $f'_\alpha : L_1 \to L_2$.

En seguida definimos la categoría de composiciones locales funtoriales.

Definición 7. *La categoría* **Loc** *consiste del conjunto* $_0$**Loc** *de todas las composiciones locales funtoriales. El conjunto* $_1$**Loc** *de morfismos es la unión disjunta de los conjuntos* $\mathbf{Loc}(L_1, L_2)$ *de morfismos* $f'_\alpha : L_1 \to L_2$. *Asimismo, tenemos el morfismo identidad y la composición de morfismos.*

A continuación veamos brevemente y sin mayor explicación unos ejemplos que muestran cómo ciertos módulos juegan un papel sobresaliente en la Teoría Matemática de la Música.

Ejemplo: Un módulo muy importante en la Teoría Matemática de la Música es el anillo de monoide $\mathbb{Z}\langle ASCII\rangle$. Esta construcción nos permite emplear el código universal ASCII, es decir, el conjunto de caracteres ASCII, que necesitamos para reflejar cualquier situación en que aparezcan palabras (pero requerimos que se ajuste a nuestro marco teórico, basado en la pregavilla $\mathbf{Mod}^{@}$). Construimos $\mathbb{Z}\langle ASCII\rangle$ con un alfabeto A y un anillo conmutativo de coeficientes. Así es que $\langle A\rangle$ es el monoide libre de todas las palabras $(a_1, a_1a_2, \ldots, a_1 \ldots a_n, \ldots)$ generadas por A. El anillo de monoide, $\Lambda\langle A\rangle$ son todas las sumas $\sum_{p\in\langle A\rangle} \lambda_p p$ con sólo un número finito de $\lambda_p \neq 0$.

$\mathbb{Z}\langle ASCII\rangle$ se construye sobre el anillo de los enteros $\mathbb{Z}$. Para los nombres de Denotadores y Formas de tipo **Simple**, normalmente sólo empleamos el caso particular de $\lambda_p = 1$ que nos da $\langle A\rangle \subset \mathbb{Z}\langle ASCII\rangle$, pero sí hay situaciones en que se hará uso de toda la estructura de $\mathbb{Z}\langle ASCII\rangle$ como un $\mathbb{Z}$- módulo. Esto podría ser, por ejemplo, en el caso de ver las diferentes muliplicidades de “sub-Formas” usadas en una Forma dada (**el ejemplo, de *Pianoscore Form,* Figura 1).

Ejemplo: La Forma *EulerModule*, que es muy usado en la Teoría Matemática de la Música tiene Coordinador en el módulo $\mathbb{Q}^3$ sobre $\mathbb{Q}$.

$$EulerModule \to_{Id} \mathbf{Simple}(\mathbb{Q}^3)$$

Sea $o = (1,0,0), q = (0,1,0), t = (0,0,1)$ la base canónica de $\mathbb{Q}^3$ donde o es el eje de las octavas (como intervalo musical), q las quintas y t las terceras. Cada punto en el espacio *EulerModule*, (a,b,c), puede escribirse como $p = a \cdot o + b \cdot q + c \cdot t$. Asimismo, la quinta y la tercera mayor se asocian con los puntos $q-o$ y $t-2o$, que representan la cuarta y la sexta menor respectivamente. También $p=(a+b+2c)\cdot o+b\cdot(q-o)+c\cdot(t-2o)=(a,b,c)$.

Esto nos dice que cualquier nota (que, a su vez, puede concebirse como un intervalo, o diferencia de 2 notas, ya que tanto a la nota como al intervalo se le asocia un vector) puede generarse de la octava, la quinta y la tercera mayor por medio de intercambio, yuxtaposición y división.

Unos ejemplos de composiciones locales (Denotadores) usadas en la Teoría Matemática de la Música son:

Un *acorde* es una composición local finita con espacio ambiente igual a *EulerModule*. Es decir, si el funtor del Coordinador de la Forma *EulerChord* es $F(CF)=F=Fun(EulerModule)$, entonces la composición local es un Denotador

$Cr : A \rightsquigarrow EulerChord(Cr)$ de Forma

$$EulerChord \rightarrow_{Fin(F)\rightarrow\Omega^F} \mathbf{Power}(EulerModule)$$

con cardinalidad n.

Un acorde de clase p (por ejemplo, $p=12$ y estamos en $\mathbb{Z}_{12}$) es una composición local finita con espacio ambiente

$$p\text{-}Eulerclass \rightarrow_{Identidad} \mathbf{Simple}(\mathbb{Q}^3/\mathbb{Z}\cdot p)$$

y si $Fun(CF)=F=Fun(p\text{-}EulerClass)$ entonces un acorde de clase p es un Denotador

$$p\text{-}Cr\colon\ 0 \rightsquigarrow p\text{-}ClassChord\ (p\text{-}EulerClass)$$

con Forma

$$p\text{-}ClassChord \quad \underset{Fin(F)\rightarrow\Omega^F}{\rightarrow} \quad \mathbf{Power}(p\text{-}EulerClass).$$

Consideremos el espacio ambiente *EulerModule*. Una escala es *periódica*, en la medida en que repite las notas de la escala después de un periodo. Si el periodo $p\neq 0$, el Denotador se expresa $p:0\rightsquigarrow EulerModule(p)$. Esto nos da un morfismo que es la proyección canónica $\pi : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3/\mathbb{Z} \cdot p$. Así es que cada composición local objetiva $K : A \hookrightarrow A@Fun(EulerModule)$ se proyecta en $\mathrm{mod}_p(K) : A \hookrightarrow A@Fun(p\text{-}EulerClass)$. Por lo tanto, tenemos la siguiente definición.

Definición 8. *Dado un periodo p, una p-Scale (p-Escala) es una composición local no vacía S, de espacio ambiente EulerModule, y* $F(EulerModule) = @\mathbb{Q}^3$ *tal que:*

(i) su proyección $mod_p(S)$ *es un acorde de la p-clase y*

(ii) $S = e^p L$, *es decir, S es periódica de periodo p.*

La Teoría Enumerativa es un acercamiento cuantitativo a la clasificación de composiciones locales via acciones de grupos de permutaciones. El trabajo principal en esta área es de Harald Fripertinger. Esta teoría trata de contar las órbitas de acciones de grupos finitos en conjuntos finitos. Estos conjuntos representan objetos particulares especiales, es decir, acordes, particiones de conjuntos de clase de notas o de altura, motivos, sucesiones de 12 notas etc. Los grupos consisten de transformaciones musicales interesantes tales como la transposición y la inversión. ¿Por qué existe interés en números tales como por ejemplo 2 230 741 522 540 743 033 415 296 821 609 381 912 = 2.23 ... 10^{36} que denota el número de clases de isomorfismo de motivos de 72 elementos en $\mathbb{Z}_{12}^2$?.

Recordemos la Teoría de Pólya para enumerar las clases de isomorfismo de composiciones locales con dirección o ubicación cero $K \subset \mathbb{Z}_n$ donde el conjunto K está identificado con su función característica $\chi_K : \mathbb{Z}_n \to 2$ con identificación $2 = \{0, 1\}$. Así que las composiciones locales con ubicación cero $K \subset \mathbb{Z}_n$ están identificadas con el conjunto potencia $2^{\mathbb{Z}_n}$. Si un grupo $G \subset \overrightarrow{GL}(\mathbb{Z})$ de automorfismos afines actúa en el conjunto de composiciones locales con ubicación o dirección cero $K \subset \mathbb{Z}_n$, esta acción se refleja en el conjunto potencia mediante la acción derecha obvia $(\chi_K, g) \to \chi_K \cdot g$. Para contar G-órbitas en $2^{\mathbb{Z}_n}$, se introducen funciones peso como al principio $w : 2 \to R$ con valores en el anillo R los cuales expresan conjuntos especiales de composiciones locales.

Existen resultados para contar el número de composiciones locales con ubicación o dirección cero con respecto a tipos de isomorfismo comunes en la clasificación de acordes. Esto es una aplicación directa de las fórmulas del índice del ciclo a estos grupos.

Para el grupo de translaciones $T_n = e^{\mathbb{Z}_n}$, y para el grupo de translaciones e inversión TI_n, el número de G-órbitas de composiciones locales con ubicación o dirección cero en $\mathbb{Z}_n$ se calcula a partir del coeficiente de la potencia x^k etc. y tenemos la siguiente

Proposición 1 (H. Fripertinger). *El número de T_n-órbitas de k-elementos de composiciones locales con ubicación o dirección cero en $\mathbb{Z}_n$ es*

$$\frac{1}{n}\sum_{j|mcd(n,k)} \varphi(j)\binom{n/j}{k/j},$$

el número de TI_n-órbitas de k-elementos de composiciones locales con ubicación o dirección cero en $\mathbb{Z}_n$ es

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{2n}\sum_{j|mcd(n,k)} \varphi(j)\binom{n/j}{k/j} + n\binom{(n-1)/2}{[k/2]} & n \text{ impar} \\ \frac{1}{2n}\sum_{j|mcd(n,k)} \varphi(j)\binom{n/j}{k/j} + n\binom{n/2}{k/2} & n\ k \text{ par} \\ \frac{1}{2n}\sum_{j|mcd(n,k)} \varphi(j)\binom{n/j}{k/j} + n\binom{(n-2)/2}{[k/2]} & n \text{ par, } k \text{ impar} \end{array}\right\}$$

donde φ denota la función de Euler y $[t]$ la parte entera de t.

Para el caso especial $n = 12$, un resultado que no mencionaré y el índice del ciclo $Z(\overrightarrow{GL}(\mathbb{Z}_{12}))$ dan las $\overrightarrow{GL}(\mathbb{Z}_{12})$-órbitas, es decir las clases de isomorfismo. Véase la lista de órbitas en [3], pág. 234.

Se tiene el siguiente teorema donde $PiMod_n$ es la forma cuyo coordinador $\mathbb{Z}_n$ denota las clases de notas con la afinación n-temperada, $OnMod_m$ denota la forma cuyo coordinador $\mathbb{Z}_m$ denota los m-cuclic metrical onsets, juntando estos dos aspectos de una nota musical obtenemos un representante común de comienzo (onset) y altura o nota en el módulo $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ con coordinador $OnPiMod_{n,m}$.

Teorema 2 (H. Fripertinger). *El número de composiciones locales K con ubicación o dirección cero en $OnPiMod_{n,m}$ bajo el grupo H de automorfismos afines de $\mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_m$ es el coeficiente de x^k en el polinomio del índice del ciclo*

$$Z(H)(1+x, 1+x^2, ..., 1+x^{nm}).$$

Para el caso especial $n = m = 12$ y $H = \overrightarrow{GL}(\mathbb{Z}_{12})$, la evaluación ha sido calculada usando un programa Turbo Pascal. Los primeros monomios del polinomio son $x^{144} + x^{143} + 5x^{142} + 26x^{141} + ...$

Muestra en particular las clases de 72-elementos 2 230 741 522 540 743 033 415 296 821 609 381 912 = $2.23...(10)^{36}$ lo cual indica que todavía hay motivos para ser introducidos en la composición musical.

Como acabamos de ver, la Teoría Matemática de la Música de G. Mazzola es el proyecto más interesante que actualmente se desarrolla en este campo. Por cierto, los invito a leer las Memorias del Primer Seminario Internacional de Teoría Matemática de la Música de la UNAM en México, D.F. que tuvo lugar hace dos años posteriormente a la Sesión Especial que tuvimos en el XXXIII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana en Saltillo, Coahuila en octubre del 2000 en las Publicaciones Electrónicas de nuestra Sociedad así como la bibliografía para encontrar un exquisito conjunto de artículos sobre esta área.

La música pertenece a los humanos y no aparece ya como una revelación de las divinidades de cualquier sabor. También, esta renovación se debe al inmenso arsenal de información y tecnología comunicativa donde la información se convierte en algo muy accesible y la carencia de precisión es de inmediato señalada. Esta situación da lugar a una nueva y fundamental manera de entender el conocimiento humano.

El conocimiento está actualizándose y extendiéndose constantemente y en el cual navegamos y experimentamos con un espíritu de espacio-tiempo dinámïco. Ahora tenemos nuevos paradigmas en Musicología. Recordemos el experimento de Galileo acerca de la velocidad instantánea. Su acercamiento fue esencialmente bajo observación y medición y no en reflexiones abstractas especulativas. Su punto clave fue el de pasar del encapsulado especulativo de Oresme y los científicos medievales a accesibilidad "haciendo ciencia" con el método operacional: pensar haciendo. Este episodio tiene un análogo musicológico: velocidad en física con tiempo musical solamente que 500 años después.

Esto coloca a la Física y la Musicología en forma paralela donde hoy, músicos activos y matemáticos entre otros, están al borde de lo explícito dejando las especulaciones irrelevantes donde corresponde. Se están dejando atrás las últimas retóricas vacías. La revolución de Galileo fue la respuesta a la supuesta profundidad del discurso retórico.

Si consideramos los universos creados por el hombre tales como la Matemática y la Música podremos ver que el universo interno de ellas no es menos complicado e incontrolable que la naturaleza externa. Una pieza de naturaleza incontrolable, dada su riqueza de creación tal como la increíble complejidad a partir de un germen que implica procesos combinatorios, estrategias de interpretación, estratificación semiótica, etc. como el Arte de la Fuga de Bach, no es fundamentalmente diferente de una supernova en el espacio interestelar. Estamos actualmente viviendo un cambio tan radical en la Musicología como el que se experimentó en la Física hace 500 años. Es un momento maravilloso.

Referencias

[1] BENSON, D. *Mathematics and Music.* No publicado. En internet: http://www.math.uga.edu/~djb/html/math-music.html.

[2] HARVARD DICTIONARY OF MUSIC (1972). Second Edition. Willi Apel. The Belknap Press of Harvard University Press.

[3] MAZZOLA, G. (2002). *The Topos of Music.* Birkhauser.

[4] MONTIEL, M. (1999). *El Denotador: Su Estructura, Construcción y Papel en la Teoría Matemática de la Música.* Tesis de Maestría. Facultad de Ciencias. UNAM.

Emilio Lluis-Puebla
Departamento de Matemática Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México.
lluisp@servidor.unam.mx