

TEOREMA DEL UMBRAL DE KERMACK Y MCKENDRICK PARA UN MODELO EN TIEMPO DISCRETO

Elizabeth Doig

Abstract

The Theorem of Kermack and McKendrick is exposed for the continuous time, showing its analog later on for the pattern in discrete time, to which some preliminary concepts are defined on the pattern of the General Epidemic in continuous time and its relation with the pattern in discrete time.

Palabras Claves: Epidemia Simple. Epidemia General en tiempo continuo y en tiempo discreto. El Teorema del Umbral.

1 Introducción

En el modelo clásico para una *epidemia general*, se toma una población de tamaño N fijo como en el modelo de la epidemia simple, sólo que en este modelo los individuos infectos pueden morir, ser aislados, o pueden recuperarse y volverse inmunes. Se definen a los individuos en la población según el estado de su enfermedad, donde $s(t)$ representa al número de susceptibles, $i(t)$ al número de infectos y $r(t)$ al número de removibles (muertos, aislados o inmunes), así que $s(t)$ es no creciente, $r(t)$ es no-decreciente y la suma

$$s(t) + i(t) + r(t) = N, \quad \forall t \geq 0.$$

$s(t)$ satisface la ecuación diferencial:

$$\frac{ds}{dt} = -\beta si, \tag{1.1}$$

donde $\beta > 0$ es el parámetro de infección, y $(s, i, r)(0) = (s_0, i_0, r_0)$ con $i_0 \geq 1, r_0 = 0$. El número de individuos infectos simultáneamente aumenta en la misma razón como el número de susceptibles disminuye, y disminuye a través de los que se remueven (por muerte, aislamiento o inmunidad) a una razón per cápita $\gamma > 0$, así que:

$$\frac{di}{dt} = \beta si - \gamma i \tag{1.2}$$

Finalmente el número de individuos removidos aumenta en exactamente la misma razón como la pérdida de individuos infectos, de manera que:

$$\frac{dr}{dt} = \gamma i \tag{1.3}$$

Como el tamaño de la población total permanece fijo en N , entonces:

$$\left(\frac{d}{dt} \right) (s(t) + i(t) + r(t)) = 0.$$

Kermack y McKendrick [1], en su primer artículo titulado "Una contribución a la teoría matemática de las epidemias", propusieron estas ecuaciones como un modelo simple que describe el curso de una epidemia, así como el teorema del umbral que resume los resultados principales que obtuvieron, y que a continuación presentamos. Podemos escribir (1.1) y (1.3) como:

$$\frac{1}{s} \cdot \frac{ds}{dt} = -\frac{\beta}{\gamma} \cdot \frac{dr}{dt} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dr}{dt}, \quad (1.4)$$

donde $\rho \equiv \gamma/\beta$ es la tasa relativa removible. Integrando directamente esta ecuación diferencial, y usando los valores iniciales s_0 y $r_0 = 0$, obtenemos:

$$s(t) = s_0 e^{-r(t)/\rho} \quad (1.5)$$

Se obtiene una segunda integral de las ecuaciones (1.1-2) puesto que implican que $s(t)$ e $i(t)$ satisfacen:

$$\frac{di}{ds} = -1 + \frac{\rho}{s},$$

así

$$s(t) + i(t) - \rho \ln s(t) = s_0 + i_0 - \rho \ln s_0 \quad (1.6)$$

Dentro de la región donde s, i , y r son no - negativas, la ecuación (1.2) mantiene la desigualdad $\frac{di}{dt} \geq -\gamma i$, lo que a su vez implica que

$$i(t) \geq i_0 e^{-\gamma t} > 0, \text{ para todo } 0 < t < \infty.$$

Similarmente,

$$\frac{ds}{dt} \geq -\beta s(s_0 + i_0),$$

así que:

$$s(t) \geq s_0 e^{-\beta(s_0+i_0)t} > 0, \text{ para todo } 0 < t < \infty.$$

Sin embargo, de (1.1), $s(t)$ es estrictamente decreciente para t . Por lo tanto $s(t), r(t)$, e $i(t)$, convergen a límites finitos s_∞, r_∞ e i_∞ cuando $t \rightarrow \infty$; con $i_\infty \neq 0$, cuando $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dr}{dt} > 0$.

Además, de (1.5):

$$s_{\infty} = s_0 e^{-r_{\infty}/\rho},$$

debido a que $r_{\infty} \leq s_0 + i_0 < \infty$, $s_{\infty} > 0$, y la ecuación (1.2) implica que $\frac{di}{dt}$ es en parte monótona decreciente para toda $t > 0$ sí y sólo sí $s_0 \leq \gamma/\beta = \rho$.

Los resultados de Kermack y McKendrick constituyen una referencia para un conjunto de modelos epidémicos.

Teorema 1.1. (Kermack y McKendrick) *Una epidemia general se desarrolla según las ecuaciones diferenciales (1.1-3) de valores iniciales $(s_0, i_0, 0)$, donde $s_0 + i_0 = N$.*

- (i). (La Supervivencia y el Tamaño Total). Cuando la infección finalmente termina la propagación de la epidemia cesa, un número s_{∞} , de individuos susceptibles no se han infectado, y el número total r_{∞} de individuos que se infectaron finalmente y fueron removidos es igual a $s_0 + i_0 - s_{\infty}$, y es la única raíz de la ecuación

$$N - r_{\infty} = s_0 + i_0 - r_{\infty} = s_0 e^{-r_{\infty}/\rho}, \quad (1.7)$$

donde $i_0 < r_{\infty} < s_0 + i_0$, $\rho = \gamma/\beta$ la tasa relativa de removimiento.

- (ii). (El Teorema del Umbral). Una mayor propagación ocurre sí y sólo sí $\frac{di}{dt}(0) > 0$; esto pasa únicamente sí el número inicial de susceptibles $s_0 > \rho$.
- (iii). (Segundo Teorema del Umbral). Si s_0 excede a ρ por una cantidad pequeña v , y si el número inicial de infectos i_0 es relativamente pequeño respecto de v , entonces el número final de susceptibles que queda en la población es aproximadamente $\rho - v$, y $r_{\infty} \approx 2v$.

Como en la práctica se presentan con mayor frecuencia datos en forma discreta, se hace necesario analizar el modelo de tiempo discreto análogo al modelo de tiempo continuo, por eso se estudiará en la siguiente sección.

2 Modelo Determinístico de Tiempo Discreto

Gani [2] sugirió que para periodos cortos de mezcla de individuos susceptibles e infectos que ocurren en intervalos regulares, podría ser más apropiado reformular el modelo visto anteriormente para el tiempo discreto. En este caso, los s_t individuos susceptibles, e i_t individuos infectos, y r_t individuos removibles ($t = 0, 1, 2, \dots$) satisfacen las siguientes ecuaciones en diferencias:

$$\begin{aligned} s_{t+1} &= (1 - \beta i_t) s_t, \\ i_{t+1} &= (1 - \gamma + \beta s_t) i_t, \\ r_{t+1} &= r_t + \gamma i_t, \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde $s_t + i_t + r_t = N$. Denotaremos a, β y γ ($0 < \beta, \gamma < 1$) como los parámetros de infección y removimiento respectivamente, con valores que pueden ser diferentes de aquellos que corresponden al caso del tiempo continuo. Como antes, $N > s_0 > 0$, $N > i_0 > 0$, y $r_0 = 0$ son los valores iniciales del proceso. Debe notarse que en (2.1) es posible que s_{t+1} pueda tomar algún valor negativo para ciertos valores positivos de s_t, i_t ; aunque esto no es posible en la práctica.

La objeción que se hace al artículo de Gani [2], es la de que el modelo (2.1) no es completamente realista; sin embargo tiene propiedades matemáticas interesantes que examinaremos posteriormente. Como s_{t+1} , podría tomar valores negativos en (2.1), entonces para evitar esta posibilidad se deben reescribir las ecuaciones en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} s_{t+1} &= \max\{0, (1 - \beta i_t) s_t\}, \\ i_{t+1} &= (1 - \gamma) i_t + \min\{s_t, \beta s_t i_t\}, \\ r_{t+1} &= r_t + \gamma i_t, \end{aligned} \tag{2.2}$$

En este trabajo, se establece en detalle el siguiente teorema del umbral para el modelo determinístico de tiempo discreto (2.2).

Teorema 2.1. *Para una población cerrada de N individuos, y una tasa de removimiento relativo $\rho = \gamma/\beta$,*

- i. Una epidemia desarrollará ($i_t > i_0$) sólo si $s_0 > \rho$;
- ii. $i_t > 0$ ($t = 0, 1, 2, \dots$), y $\lim_{t \rightarrow \infty} i_t = 0$;
- iii. Existe $\lim_{t \rightarrow \infty} s_t = s_\infty < N - \xi$, donde ξ es la raíz positiva de la ecuación

$$N - r - s_0 e^{-r/\rho} = 0;$$

- iv. Existe una región D tal que si $(\beta s_0, \beta i_0)$ está en D , entonces $s_t > 0$ ($t = 0, 1, 2, \dots$), y $s_\infty > 0$, mientras que si $(\beta s_0, \beta i_0)$ está afuera de D , entonces $s_t = 0$ ($t = T, T + 1, \dots$), para algún $T > 0$.

Aunque i) y ii) correspondan en el Teorema de Kermack y McKendrick a modelos de tiempo discreto, hay algunas diferencias básicas entre el modelo de tiempo continuo (1.1-3) y el modelo de tiempo discreto (2.2). Específicamente, iii) indica que como $t \rightarrow \infty$, cuando β , y γ , son los mismos en ambos modelos, el número de individuos susceptibles infectados en el modelo de tiempo discreto es mayor, mientras que iv) muestra que para este modelo, la población total de individuos susceptibles puede sufrir infección en un periodo de tiempo finito T . Procedemos a demostrar estos resultados en detalle. El resultado i), es una consecuencia inmediata de la segunda ecuación en (2.2). Los resultados ii) y iii) se demuestran en la Sección 3, mientras que en la Sección 4 se probará al resultado iv) y la identificación de la región D .

3 Demostración del Teorema Umbral en Tiempo Discreto

Antes de establecer los resultados del teorema del umbral, es conveniente hacer algunas simplificaciones a las ecuaciones en diferencias (2.2), con el objeto de facilitar los cálculos. Para hacer esto, necesitamos el siguiente resultado.

Lema 1. Sea $(s_t, i_t), t = 0, 1, 2, \dots$, que satisface (2.2). Entonces $s_t \geq 0, i_t > 0, t = 0, 1, 2, \dots$. Si además $s_T = 0$ para algún $T \geq 0$, entonces $s_t = 0, t = T, T + 1, \dots$, y $\lim_{t \rightarrow \infty} i_t = 0$.

Prueba:

Se sigue rápidamente de (2.2) y del hecho de que $0 < \gamma < 1$ y $s_0 > 0, i_0 > 0$, que:

$$s_t \geq 0, \quad i_t > 0 (t = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.1)$$

Ahora sea $s_T = 0$; entonces también,

$$s_{T+1} = \max\{0, (1 - \beta i_T) s_T\} = 0 \quad (3.2)$$

y se sigue por inducción que $s_t = 0, t \geq T$. En resumen, para $t \geq T$,

$$\begin{aligned} i_{t+1} &= (1 - \gamma) i_t + \min\{s_t, \beta s_t i_t\} \\ &= (1 - \gamma) i_t \\ &= (1 - \gamma)^{t+1-T} i_T \end{aligned} \quad (3.3)$$

Desde que $0 > (1 - \gamma) < 1$, vemos que $\lim_{t \rightarrow \infty} i_t = 0$.

La situación es por lo tanto bastante real cuando $s_T = 0$ para algún $T > 0$; entonces podemos restringir nuestra atención por consiguiente al caso $s_t > 0$, (o equivalentemente $\beta i_t < 1$), $t = 0, 1, 2, \dots$. Con esta condición, las ecuaciones en diferencias (2.2) son equivalentes a (2.1). Estas pueden simplificarse al cambiar las variables de $s'_t = \beta s_t, i'_t = \beta i_t$, y $r'_t = \beta r_t, t = 0, 1, 2, \dots$. Al sustituir en (2.1) encontramos que

$$\begin{aligned} s'_{t+1} &= (1 - i'_t) s'_t \\ i'_{t+1} &= (1 - \gamma + s'_t) i'_t \\ r'_{t+1} &= r'_t + \gamma i'_t \end{aligned} \quad (3.4)$$

para $t = 0, 1, 2, \dots$ sujeto a las condiciones iniciales, $s'_0 = \beta s_0 > 0$, $i'_0 = \beta i_0 > 0$ y $r'_0 = 0$. Desde que $s'_t + i'_t + r'_t = \beta N$, es suficiente considerar sólo las dos primeras ecuaciones de (3.4).

Claramente, si se especifica (s'_t, i'_t) , entonces (3.4) determina únicamente (s'_{t+1}, i'_{t+1}) . Recíprocamente, si (s'_{t+1}, i'_{t+1}) se especifica y $s'_{t+1} > 0$, $i'_{t+1} > 0$, entonces (3.4) también determina únicamente (s'_t, i'_t) tales que $s'_t > 0, i'_t > 0$. Para esto es fácil ver que:

$$\begin{aligned} s'_t &= \frac{1}{2} \{s'_{t+1} + i'_{t+1} + \gamma - 1 + [(s'_{t+1} + i'_{t+1} + \gamma - 1)^2 + 4s'_{t+1}(1 - \gamma)]^{1/2}\}, \\ i'_t &= i'_{t+1} / (1 - \gamma + s'_t) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Se resume abajo algunas de las propiedades de la sucesión (s'_t, i'_t) .

Lema 2. Sean $s'_t > 0, i'_t > 0$ para algún t fijo. Entonces,

- i. $i'_t < 1$ sí y sólo sí $s'_{t+1} > 0$;
- ii. $i'_{t+1} \geq i'_t$ sí y sólo sí $s'_t \geq \gamma$;
- iii. $s'_t > s'_{t+1}$ entonces $s'_t + i'_t > s'_{t+1} + i'_{t+1}$.

Prueba:

Los primeros dos resultados siguen inmediatamente de (3.4). Para el tercero, notaremos que:

$$s'_{t+1} = (1 - i'_t)s'_t < s'_t$$

así que

$$s'_{t+1}i'_{t+1} = s'_t + (1 - \gamma)i'_t < s'_t + i'_t.$$

Consideramos el comportamiento de los límites de s'_t e i'_t cuando $t \rightarrow \infty$.

Lema 3. Si $s'_t > 0, t = 0, 1, \dots$, entonces,

- i. $\lim_{t \rightarrow \infty} i'_t = 0$
- ii. Existe $\lim_{t \rightarrow \infty} s'_t = s'_\infty$ y $0 < s'_\infty < \beta N - \beta \xi$ donde ξ es la raíz positiva de $N - r - s_0 e^{-r/\rho} = 0$.

Prueba:

- i. De (3.4), se puede verificar rápidamente que $i'_t > 0, t = 0, 1, 2, \dots$. También $s'_t > 0, t = 0, 1, 2, \dots$, y por el Lema 2(iii), s'_t y $s'_t + i'_t, t = 0, 1, 2, \dots$ son por consiguiente sucesiones monótonamente decrecientes acotadas. Por lo tanto, $\lim_{t \rightarrow \infty} i'_t = i'_\infty$ con $i'_\infty \geq 0$ y $s'_t > s'_\infty \geq 0, t = 0, 1, 2, \dots$. Pero de (3.4), el único punto límite posible para $i'_t, t = 0, 1, 2, \dots$ es $i'_\infty = 0$.
- ii. Suponga que $s'_\infty = 0$. Entonces podemos asumir sin pérdida de generalidad que $s'_0 < \gamma, i'_0 < 1$ y $(1 - \gamma + s'_0) < 1$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} i'_t &= (1 - \gamma + s'_{t-1})i'_{t-1} \\ &< (1 - \gamma + s'_0)i'_{t-1} \\ &< (1 - \gamma + s'_0)i'_0 = b_t \end{aligned}$$

También,

$$s'_{t+1} = (1 - i'_t)s'_t \geq (1 - b_t)s'_t$$

así que

$$s'_\infty \geq s'_0 \prod_{t=0}^{\infty} (1 - b_t) > 0 \quad \text{desde que} \quad \sum_{t=0}^{\infty} b_t < \infty.$$

De (3.4), vemos que:

$$\begin{aligned} s'_{t+1} &= (1 - i'_t)s'_t \\ &< \exp(-i'_t)s'_t \\ &< s'_0 \exp\left(-\sum_{j=0}^t i'_j\right). \end{aligned}$$

También,

$$\begin{aligned} r'_{t+1} &= r'_t + \gamma i'_t \\ &= r'_0 + \gamma \sum_{j=0}^t i'_j \end{aligned}$$

y desde que $r'_0 = 0$, se sigue que:

$$s'_t < s'_0 \exp(-r'_t/\gamma).$$

Además,

$$s'_t + i'_t + r'_t = \beta N,$$

y por lo tanto

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r_t = r'_\infty = \beta N - s'_\infty$$

Entonces:

$$r'_\infty - \beta N < s'_0 \exp(-r'_\infty/\gamma), \quad (3.6)$$

o equivalentemente, revirtiendo a las variables originales

$$r'_\infty - N < s_0 \exp(-r_\infty/\rho) \quad (3.7)$$

donde $\rho = \gamma/\beta$, $r_\infty = r'_\infty/\beta$, y $s_0 = s'_0/\beta$. Se verifica fácilmente que $r_\infty > \xi$ donde ξ es la raíz positiva de $r - N - s_0 e^{-r/\rho}$ y por lo tanto

$$s_\infty = \beta N - \beta r_\infty < \beta N - \beta \xi \quad (3.8)$$

Desde que $s_t = s'_t/\beta$ $i_t = i'_t/\beta$, se sigue de los Lemas 1 y 3 que la sucesión $(s_t, i_t), t = 0, 1, 2, \dots$, generada por (3.4) siempre tiene un límite $(s_\infty, 0)$. Además, este límite puede ser obtenido de sólo dos maneras: ya sea $s_\infty = 0$ en cuyo caso $s_t = 0, t \geq T$, ó $s_\infty > 0$ y $s_t > s_\infty, t = 0, 1, \dots$. En cualquier caso, s_∞ , el número límite de individuos susceptibles en el modelo discreto, es menor que $N - \xi$, el número límite de individuos susceptibles en el modelo de tiempo continuo.

4 La Región de Convergencia D para s_∞ Positivo

Ahora se investigan las condiciones iniciales s'_0, i'_0 (o equivalentemente s_0, i_0) generan una sucesión $(s'_t, i'_t), t = 0, 1, 2, \dots$ generada por (3.4) para la cual $s'_t > 0, t = 0, 1, \dots$

Una respuesta parcial a esta pregunta se da en el siguiente lema:

Lema 4. Sea $D_0 = \{(s', i') | 0 < s' \leq \gamma, 0 < i' < 1\}$ y $(s'_j, i'_j) \in D_0$, para algún $j \geq 0$ fijo. Entonces, $(s'_t, i'_t) \in D_0, t = j, j + 1, \dots$

Prueba:

Suponga que $(s'_\rho, i'_\rho) \in D_0$, para algún ρ . Entonces,

$$s'_{\rho+1} = (1 - i'_\rho)s'_\rho < s'_\rho \leq \gamma,$$

$$s'_{\rho+1} > 0,$$

$$i'_{\rho+1} = (1 - \gamma + s'_\rho)i'_\rho \leq i'_\rho < 1,$$

y

$$i'_{\rho+1} > (1 - \gamma)i'_\rho > 0.$$

Por lo tanto $(s'_{\rho+1}, i'_{\rho+1}) \in D_0$, y el resultado sigue por inducción.

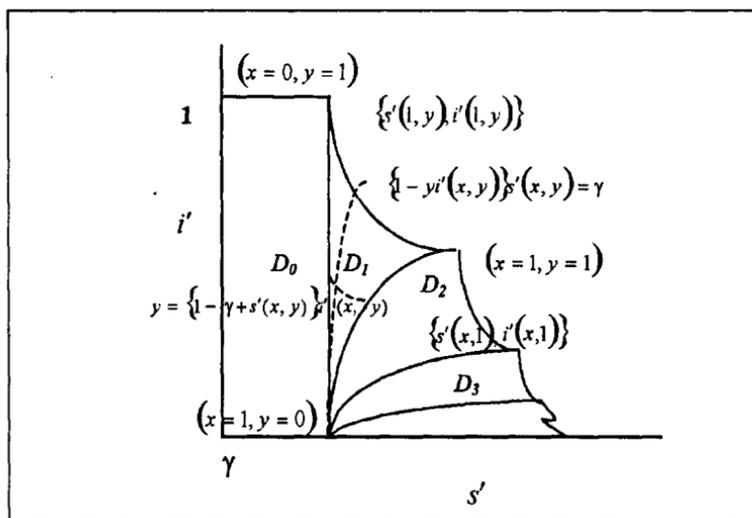
Para $j = 0$ en el lema anterior, tenemos el resultado que cuando $(s'_0, i'_0) = (\beta s_0, \beta i_0) \in D_0$, entonces $s'_t = \beta s_t > 0, t = 0, 1, \dots$ y por lo tanto por el Lema 3, $\lim_{t \rightarrow \infty} s_t = s_\infty > 0$. En la práctica, este caso no

es particularmente interesante porque $i'_{t+1} \leq i'_t$ (o equivalentemente $i_{t+1} \leq i_t$) lo cual significa que una epidemia no desarrolla para estos valores iniciales. Sin embargo, si $s'_t > 0$, $t = 0, 1, \dots$ se sigue del Lema 3 que $\lim_{t \rightarrow \infty} i'_t = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} s'_t = s'_\infty$, donde $s'_t > s'_\infty$, $t = 0, 1, \dots$, y $0 < s'_\infty < \beta(N - \xi) < \gamma$. En otras palabras, si $s'_t > 0$, $t = 0, 1, \dots$, entonces $(s'_t, i'_t) \in D_0$, $t = T, T + 1, \dots$ para algún $T > 0$.

Procedemos ahora como sigue: primero construimos una región D_1 en el cuadrante positivo del plano (s', i') tal que $(s'_t, i'_t) \in D_1$ implica que $(s'_{t+1}, i'_{t+1}) \in D_0$ y $(s'_t, i'_t) \notin D_0$, $s'_t > 0$, $i'_t > 0$, $(s'_{t+1}, i'_{t+1}) \in D_0$ implica que $(s'_t, i'_t) \in D_1$. Entonces definimos recursivamente regiones D_l , $l = 2, 3, \dots$, tales que $(s'_t, i'_t) \in D_l$, si y sólo si $(s'_{t+1}, i'_{t+1}) \in D_{l-1}$. Claramente, $s'_t > 0$, $t = 0, 1, \dots$ si y sólo existe un n tal que $(s'_0, i'_0) \in \bigcup_{l=0}^n D_l$. Esta construcción se ilustra en la Gráfica 1.

Se verifica fácilmente de (3.4) que la región D_1 es

$$D_1 = \{(s', i') \mid (1 - i')s' \leq \gamma, (1 - \gamma + s')i' < 1, s' > \gamma\}.$$



Gráfica 1: Las regiones D_l ($l = 0, 1, 2, \dots$) y la construcción de las curvas paramétricas definiendo D_1

Alternativamente, D_1 puede describirse como la región

$$D_1 = \{(s', i') \mid s' = s'(x, y), i' = i'(x, y), 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\},$$

donde $(s'(x, y), i'(x, y))$ es el punto de intersección, en el cuadrante positivo del plano (s', i') , de la hipérbola:

$$\begin{aligned} \gamma &= (1 - yi'(x, y))s'(x, y), \\ x &= (1 - \gamma + s'(x, y))i'(x, y), \end{aligned} \quad (4.1)$$

como se ilustró en la Gráfica 1.

Por lo tanto, los puntos en D_1 satisfacen las ecuaciones:

$$\begin{aligned} s'(x, y) &= \frac{1}{2} \left\{ xy + 2\gamma - 1 + [(xy + 2\gamma - 1)^2 + 4\gamma(1 - \gamma)]^{1/2} \right\}, \\ i'(x, y) &= x / (1 - \gamma + s'(x, y)), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Por lo tanto D_1 está acotado por $s' = \gamma$ y las curvas paramétricas

$$\begin{aligned} s'(1, y) &= \frac{1}{2} \left\{ x + 2\gamma - 1 + [(x + 2\gamma - 1)^2 + 4\gamma(1 - \gamma)]^{1/2} \right\}, \\ i'(1, y) &= \{1 - \gamma + s'(1, y)\}^{-1}, \\ s'(x, 1) &= \frac{1}{2} \left\{ x + 2\gamma - 1 + [(x + 2\gamma - 1)^2 + 4\gamma(1 - \gamma)]^{1/2} \right\}, \\ i'(x, 1) &= x \{1 - \gamma + s'(x, 1)\}^{-1} \quad 0 \leq x, y \leq 1. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Definimos $s'(x, y), i'(x, y), 0 \leq x \leq 1$ para $y \leq 1$ por

$$\begin{aligned} s'(x, y - 1) &= (1 - i'(x, y))s'(x, y) \\ i'(x, y - 1) &= (1 - \gamma + s'(x, y))i'(x, y) \end{aligned} \quad (4.4)$$

y el requerimiento de que $s'(x, y - 1) > 0, i'(x, y - 1) > 0, 0 < x \leq 1, 0 < y < \infty$.

Usando (3.5), obtenemos

$$\begin{aligned} s'(x, y) &= \frac{1}{2} \left\{ (s'(x, y - 1) + i'(x, y - 1) + \gamma - 1) \right. \\ &\quad \left. + [(s'(x, y - 1) + i'(x, y - 1) + \gamma - 1)^2 \right. \\ &\quad \left. + 4s'(x, y - 1)(1 - \gamma)]^{1/2} \right\}, \\ i'(x, y) &= i'(x, y - 1) / (1 - \gamma + s'(x, y)), \end{aligned} \quad (4.5)$$

para $y \geq 1$.

Esto es equivalente a la afirmación de que

$$s'_{t+1} = s'(x, y - 1), i'_{t+1} = i'(x, y - 1)$$

y $s'_t > 0, i'_t > 0$ si y sólo si $s'_t = s'(x, y), i'_t = i'(x, y)$. Se sigue de ahí que $D_l, l = 2, 3, \dots$ toman la forma:

$$D_l = \{(s', i') \mid s' = s'(x, y), i' = i'(x, y), 0 < x < 1, l - 1 < y \leq l\}, \quad (4.6)$$

la cual es una región acotada por las curvas paramétricas:

$$s' = s'(x, l - 1), i' = i'(x, l - 1); s' = s'(x, l), i' = i'(x, l), 0 \leq x \leq 1$$

y

$$s' = s'(1, y), i' = i'(1, y), l - 1 \leq y \leq l.$$

Además, está claro que de (4.2), (4.4) y (4.5) se deduce que $s'(x, y), i'(x, y)$ son funciones continuas de x e y , tales que $\bigcup_{l=0}^n D_l, n \geq 0$ es una región simplemente conexa limitada por $s' = 0, i' = 0, i' = 1$ y las curvas paramétricas

$$s' = s'(x, n), i' = i'(x, n), 0 \leq x \leq 1 \text{ y } s' = s'(1, y), i' = i'(1, y), 0 \leq y < \infty$$

Definimos a la región D como a la región encerrada por $s' = 0, i' = 0$, y por la curva paramétrica

$$s' = s'(1, y), i' = i'(1, y), \quad 0 \leq y < \infty,$$

pero sin incluirlas como se ilustra en la Gráfica 1.

Consideraremos la convergencia de s'_t más cercana a un s_∞ positivo.

Lema 5. Sea $(s'_t, i'_t), t = 0, 1, 2, \dots$ la sucesión generada por (3.4) con $s'_0 > 0, i'_0 > 0$. Entonces $s'_t > 0, t = 0, 1, 2, \dots$, si y sólo si $(s'_0, i'_0) \in D$.

Prueba:

La necesidad sigue de la construcción y necesitamos sólo mostrar que si $(s', i') \in D$, entonces existe un $n \geq 0$ tal que $(s', i') \in \bigcup_{l=0}^n D_l$.

Desde que $i'(x, n) \uparrow$ en x, y de (4.4), $i'(1, n) \downarrow 0$, tenemos para n suficientemente grande

$$i' > i'(1, n) \geq i'(x, n).$$

También, $\bigcup_{l=0}^n D_l$, es una región simplemente conectada limitada, incluida por un límite continuo, y como $i'(1, y) > 0, s'(1, y) > 0$ se sigue que $(s', i') \in \bigcup_{l=0}^n D_l$.

Referencias

- [1] KERMACK, W. D., MCKENDRICK, A. G. (1927). *Contribución a la teoría matemática de epidemias*. Proc. Roy. Soc. A'115, 700-721.
- [2] GANI, J. (1978). *Algunos problemas de teoría epidémica*. J. R. Statistic. Soc. A, 141, 323-347.
- [3] KENDALL, D. G. (1957). *Epidemias Determinísticas y Estocásticas en poblaciones cerradas*. Proc. Tercer Simposio de Berkeley. Math. Statist. Prob. 4, 149-165. Prensa de la Universidad de California.
- [4] DALEY, D. J., GANI, J. (2001). *Epidemic Modelling*. Cambridge University Press.

Elizabeth Doig
Sección Matemáticas, Departamento de Ciencias
Pontificia Universidad Católica del Perú
edoig@pucp.edu.pe