Pro Mathematica Vol. XVII, N°33, 2003

NOTA SOBRE LAS CONDICIONES DE TRANSVERSALIDAD EN PROBLEMAS DE CONTROL ÓPTIMO

Elvio ***Accinelli***

Abstract

The controversial topic of which the conditions of transversality are for problems of infinite temporal horizon is presented here within the general context of the theory of Optimal Control. Results are presented for linear and autonomous case, as well as Arrow's theorem.

Facultad de Ingeniería (IMERL), Montevideo, Uruguay.

1 Introducción

El conocimiento de las condiciones de transversalidad para los problemas de Control Óptimo es de gran interés en Teoría Económica. Generalmente la discusión no está presente en los textos clásicos de Economía y se aceptan algunos estereotipos como la única forma posible para estas condiciones en muchos casos sin dar al lector la posibilidad de entender bien la necesidad matemática de una u otra más allá de la interpretación económica de la misma.

Comenzaremos estas notas con el planteo más general, para sistemas no autónomos con intervalos finitos y luego pasaremos a la consideración de algunas condiciones de transversalidad en casos autónomos. Finalmente presentaremos distintos criterios posibles de optimalidad en casos de intervalos temporales infinitos y sus correspondientes condiciones de transversalidad. Generalmente la generalización de las condiciones de transversalidad propias de los casos finitos a los casos infinitos no es posible realizarla de una manera inmediata, un ejemplo en este sentido es el debido a H. Halking referido en [3]. Digamos también que en la Teoría Económica el caso de horizonte infinito presenta particular interés, en especial en aquellas áreas que como la Teoría del Crecimiento se preocupan por relaciones intergeneracionales.

2 El Principio del Máximo en el Caso no Autónomo

En esta sección siguiendo [1] asumiremos que

1. $\dot{x} = f(x, t, u)$ es un proceso de control en R^n con $f \in C^1$ en R^{n+1+m}.

2. Los estados inicial y objetivo, estarán representados por los conjuntos $X_0 \subset R^n$ y $X_1 \subset R^n$.

3. Los controles admisibles Δ son funciones $u(t)$ medibles acotadas en intervalos finitos $t_0 \leq t \leq t_1$, tales que $u(t) \subset \Omega \subset R^m$ que transportan algún punto $x_0 \in X_0$ para algún punto $x_1 \in X_1$.

4. El costo asociado al control $u(t) \in \Delta$ en $t_0 \leq t \leq t_1$, con respuesta $x(t)$ es:

$$C(u) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), t, u(t))dt$$

con $f^0 \in C^1$ en R^{n+1+m}.

La respuesta a $u(t)$ está dada por

$$\tilde{x}(t) = (x_0(t), x(t), x^{n+1}(t))$$

que es la solución de:

$$(\tilde{S}) \qquad \dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(\tilde{x}, u)$$

o equivalentemente:

$$\begin{aligned} \dot{x}^0 &= f^0(x, x^{n+1}, u) \\ \dot{x} &= f(x, x^{n+1}, u) \\ \dot{x}^{n+1} &= 1. \end{aligned}$$

El sistema adjunto basado en $u(t)$ y $\tilde{x}(t)$, es

$$(\tilde{A}) \qquad \dot{\tilde{\eta}} = -\tilde{\eta}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}(t), u(t))$$

o bien

$$\dot{\eta}_0 = 0$$

$$\dot{\eta}_j = -\sum_{i=0}^{n} \eta_i \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x(t), t, u(t)) \qquad j = 1, \ldots, n$$

$$\dot{\eta}_{n+1} = -\sum_{i=0}^{n} \eta_i \frac{\partial f^i}{\partial t}(x(t), t, u(t))$$

El Hanmiltoniano en este caso queda representado por:

$$\tilde{H}(\tilde{\eta},\tilde{x},u) = \eta_0 f^0(x,x^{x+1},u) + \ldots + \eta_n f^n(x,x^{n+1},u) + \eta_{n+1} \quad \text{y}$$

$$\tilde{M}(\tilde{\eta},\tilde{x}) = \max_{u\in\Omega} \tilde{H}(\tilde{\eta},\tilde{x},u).$$

También escribiremos:

$$\tilde{x} = (\bar{x}, x^{n+1}), \quad \tilde{\eta} = (\bar{\eta}, \eta_{n+1})$$

$$\tilde{H}(\tilde{\eta},\tilde{x},u) = \bar{H}(\bar{\eta},\bar{x},t,u) + \eta_{n+1}$$

$$\tilde{M}(\tilde{\eta},\tilde{x}) = \bar{M}(\bar{\eta},\bar{x},t) + \eta_{n+1}.$$

Teorema 1. *Considere el siguiente proceso en R^n*

$$(S) \quad \dot{x} = f(x,t,u).$$

Sea Δ el conjunto de todos los controles, acotados y medibles $u(t) \in \Omega \subseteq R^n$, en intervalos de tiempo $t_0 \leq t \leq t_1$, que transportan algún $x_0 \in X_0$ para $x_1 \in X_1$ y el costo asociado a u

$$C(u) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x\,(t),\, t,\, u(t))dt.$$

Si $u^*(t)$ en $t_0^* \leq t \leq t_1^*$, con respuesta $\tilde{x}^*(t)$ es optimal en Δ, entonces existe una respuesta no trivial $\tilde{\eta}^*(t)$ de $\tilde{A}$ tal que:

$$\tilde{H}(\tilde{\eta}^*(t),\tilde{x}^*(t),u^*(t)) = \tilde{M}(\tilde{\eta}^*,\tilde{x}^*(t)) \quad a.e.$$

y además

$$\tilde{M}(\tilde{\eta}^*,\tilde{x}^*(t)) \equiv 0, \; \eta_0 \leq 0, \quad \textit{para casi todo} \quad t_0^* \leq t \leq t_1^*.$$

Estas conclusiones pueden escribirse también como:

$$\bar{H}(\bar{\eta}^*(t),\bar{x}^*(t),t,u^*(t)) = \bar{M}(\bar{\eta}^*(t),\,\bar{x}^*(t),t); \quad a.e.$$

y

$$\bar{M}(\bar{\eta}^*(t), \bar{x}^*(t), t) \equiv \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=0}^{n} \eta_i \frac{\partial f_i}{\partial t}(x^*(s), s, u^*(s))\, ds.$$

La demostración de este teorema puede verse en [1].

Las condiciones de tranversalidad son:

1. $$\eta_{n+1}^*(t_0^*) = \eta_{n+1}^*(t_1^*) = 0,$$

   por lo que,

   $$\bar{M}(\bar{\eta}^*(t_1^*), \bar{x}^*(t_1^*), t_1^*) = 0.$$

   Si X_0 y X_1 (o una de ellas) son variedades en R^n con espacios tangentes dados por T_0, y T_1 en x_0^* y x_1^*, respectivamente, entonces $\bar{\eta}^*(t)$ puede ser seleccionado de forma tal que satisfaga

   $$\eta^*(t_0^*) \perp T_0, \quad \eta^*(t_1^*) \perp T_1,$$

   o al menos a una de ellas.

2. Consideremos condiciones de transversalidad para algunos casos particulares.

   (i) Consideremos fijo $t_0 = t_0^*$ mientras que dejamos libre a $t_1 > t_0$. En este caso las condiciones de transversalidad así como las de optimalidad se mantienen incambiadas, no obstante no podemos afirmar que $\eta_{n+1}^*(t_0^*) = 0$.

   (ii) Agreguemos ahora la dificultad adicional de variar los conjuntos de estados iniciales y el objetivo: $X_0(t)$ y $X_1(t)$ respectivamente. En este caso como antes obtenemos que:

   $$\bar{H} = \bar{M} \equiv 0 \quad con \quad \eta_0 \leq 0.$$

   Y también:

   $$\bar{H} \equiv \bar{M}\, y\, \bar{M} = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=0}^{n} \eta_i \frac{\partial f_i}{\partial t}(x^*(s), s, u^*(s))\, ds - \eta_{n+1}^*(t_1^*).$$

   Las condiciones de transversalidad serán en este caso:

   $$(\eta^*(t_0^*), \eta_{n+1}^*(t_0^*)) \perp X_0(t_0^*) \; en \; (x_0^*, t_0^*) \in R^{n+1}$$

y

$$(\eta^*(t_1^*), \eta_{n+1}^*(t_1^*)) \perp X_1(t_1^*) \; en \; (x_1^*, t_1^*) \in R^{n+1}$$

Si $t_0 = t_0^*$ está fijo, entonces la única condición de transversalidad será la correspondiente a t_1^*, no obstante se cumplirá que $\eta^*(t_0^*) \perp X_0$ en R^n.

En particular si $X_0 = x_0$ y $X_1(t)$ es una curva $(x(t), t)$ en R^{n+1}, entonces no hay condición de transversalidad en t_0 no obstante en t_1 obtenemos:

$$\eta_1^*(t_1^*)q_1 + \eta_{n+1}^*(t_1^*) = 0,$$

donde $q_1 = \dot{x}(t_1^*)$ es la velocidad del objetivo. En este caso:

$$\bar{M}(\bar{\eta}^*(t_1^*), \bar{x}^*(t_1^*), t_1^*) = \eta_1^*(t_1)q_1.$$

3 Condiciones de Transversalidad para el Caso Autónomo

En el caso en que la variable t no aparece explícitamente en el integrando ni en el segundo miembro de la ecuación diferencial nos enfrentamos a un tipo de problema llamado autónomo. Analizaremos a continuación las condiciones de transversalidad propias de estos casos.

Consideremos el caso siguiente:

Sea el proceso de control en R^n dado por

$$\dot{x} = f(x, u)$$

donde el conjunto de los controles Ω son funciones medibles limitadas en un intervalo del tipo $0 \leq t \leq t_1$. El conjunto de controles admisibles, es el de aquellos que trasladan un punto en el conjunto de posibles valores iniciales X_0 hasta un punto situado en el objetivo X_1. Por cada $u(t)$ admisible en $0 \leq t \leq t_1$, con respuesta $x(t)$ el costo está representado por el funcional

$$C(u) = \int_0^{t_1} f^0(x(t), u(t))dt.$$

Si $u^*(t)$ en $t_0^* \leq t \leq t_1^*$ con respuesta $\bar{x}^*(t) = (x_0^*, x^*(t))$, es optimal en Δ, entonces existe una respuesta no trivial $\bar{\eta}^*(t) = (\eta_0^*, \eta^*(t))$ del sistema adjunto tal que

$$\bar{H}(\bar{\eta}^*(t), \bar{x}^*(t), u^*(t)) = \bar{M}(\bar{\eta}^*, \bar{x}^*(t)) \quad a.e.$$

y además

$$\bar{M}(\bar{\eta}^*, \bar{x}^*(t)) \equiv 0, \quad \eta_0 \leq 0, \quad \textit{para casi todo} \quad t_0^* \leq t \leq t^*.$$

Condiciones de transversalidad

1. En el caso en que X_0 y X_1 (o sólo una de ellas) sean variedades con espacios tangentes T_0 y T_1 en x_0 y en $x^*(t^*)$ respectivamente, entonces $\bar{\eta}^*(t)$ puede ser seleccionado de forma tal que satisfaga

$$\eta^*(t_0^*) \perp T_0, \quad \eta^*(t_1^*) \perp T_1,$$

(o al menos a una de ellas).

2. Si el objetivo X_1 es todo R^n el problema de controles conocido como el problema *con punto final libre.* El control óptimo verifica las condiciones anteriormente escritas y la respuesta adjunta verifica las condiciones de transversalidad. La condición final de transversalidad será $\eta^*(t^*) = 0$. Obsérvese que en este caso se obtendrá $\eta_0 = -1$.

3. En el caso en que el intervalo de tiempo es fijo $t \in [0, T]$ el problema de control óptimo es conocido como un problema *de tiempo fijo.* En este caso existe una respuesta adjunta $\bar{\eta}^*(t) = (\eta_0^*, \eta^*(t))$ en $0 \leq t \leq T$ tal que el principio del máximo se verifica siendo:

$$\bar{H}(\bar{\eta}^*, \bar{x}^*, u^*) = \bar{M}(\bar{\eta}^*, \bar{x}^*)$$

verificándose además que: $\bar{M}(\bar{\eta}, \bar{x})$ es constante pero en principio no podemos afirmar que sea cero, ni que $\eta_0 < 0$ por lo tanto debe discutirse la posibilidad de que la solución óptima involucre a $\eta_0 = 1$.

4. En el caso en que le intervalo fijo se transforme en un intervalo infinito con $\lim_{t \to \infty} x^*(t) = x_1$ entonces existe $\bar{\eta}^*(t)$ tal que

$$\bar{H}(\bar{\eta}^*, \bar{x}^*, u^*) = \bar{M}(\bar{\eta}^*, \bar{x}^*)$$

verificándose además que:

$$\bar{M}(\tilde{\eta}, \bar{x}) \equiv 0 \quad \textit{en casi todo} \quad 0 \leq t \leq \infty,$$

y $\eta_0 \leq 0$.

Casos Particulares

Supongamos que el intervalo de tiempo es fijo del tipo $[0, T]$ y el costo está definido por

$$C(u) = g(x(T)) + \int_0^T f^0(t, x(t)) + h^0(t, u(t))dt$$

asumimos la convexidad de las funciones $f^0(x, t)$ y $h^0(x, t)$ para cada t. Se asume también que g es una función convexa y la continuidad de las funciones $A(t), B(t), f^0(t, x(t)), h^0(t, u(t)), g$ en cada t. Entonces deben verificarse las siguientes condiciones de transversalidad:

(a) La solución de la ecuación adjunta $\bar{\eta}^*(t)$ debe verificar la condición:

$$\eta^*(T) = grad(g, (x(T))).$$

(b) Bajo la hipótesis de estricta convexidad de $h^0(t, u(t))$ para cada t y un objetivo G definido como $\{x \in R^n : \gamma(x) \leq 0\}$ siendo $grad(\gamma(x)) \neq 0$ en la frontera de G obtenemos la condición de transversalidad:

$$\eta^*(T) = -k\, grad\, \gamma(x, (T)).$$

4 Problemas con Horizonte Infinito

Es costumbre en muchas aplicaciones de la teoría económica asumir que el período de planificación es infinito.

Partimos de que la evolución del sistema está dado por el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{x} = f(x, t, u), \quad x(t_0) = x_0$$

Como una directa generalización del caso finito, se trata de hallar un control admisible que maximice o minimice la integral impropia

$$C(u) = \int_{t_0}^{\infty} f^0(x(t), t, u(t))dt.$$

En este caso, asociado al problema de definir correctas condiciones de transversalidad, aparece el problema de definir criterios de optimalidad cuando la integral impropia no converge en todos los pares (control trayectoria) admisibles.

A continuación presentamos un resumen de posibles criterios de optimalidad tomados de [2].

4.1 Criterios de Optimalidad

1. Un par admisible $(x^*(t), u^*(t))$ es *optimal por partes* (OPP) si para todo $T \geq t_0$ la restricción de $(x^*(t), u^*(t))$ a $[t_0, T]$ es optimal en el problema con horizonte fijo $x(T) = x(T^*)$, como la condición terminal para el problema con costo dado por $\int_{t_0}^{T} f^0(x(t), t, u(t))dt$. Sea

$$D(t) = \int_{t_0}^{t} f^0(x^*(\tau), \tau, u^*(\tau))d\tau - \int_{t_0}^{t} f^0(x(\tau), \tau, u(\tau))d\tau.$$

2. Un par admisible $(x^*(t), u^*(t))$ es *optimal esporádicamente por encima* (OEE) si:

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} D(t) \geq \epsilon$$

para todo par admisible.

3. Un par admisible $(x^*(t), u^*(t))$ es *optimal por encima* (OE) si:

$$\underline{\lim}_{t\to\infty} D(t) \geq \epsilon$$

para todo par admisibles.

4. Un par admisible $(x^*(t), u^*(t))$ es *optimal en el futuro* (OF) si existe t' tal que $D(t) \geq 0$ para todo $t \geq t'$.

Como fácilmente puede verse:

- $(OF) \to (CE) \to (CEE) \to (OPP)$.

4.2 Condición Suficiente de Arrow

Considere el problema de control óptimo con horizonte infinito con el criterio (CE)[1] y la condición adicional de que $x(t)$ pertenece a un conjunto convexo $A(t)$ previamente establecido para cada $t \geq t_0$. Supongamos que el par admisible $(x^*(t), u^*(t))$ es tal que $x(t) \in A(t)$. Supongamos que existe una función continua $\bar{\eta}(t)$ tal que $\eta_0 = 1$ y además que:

$$\bar{H}(x, \eta(t), t) = \max_{u \in \Omega} H(x, u, t)$$

existe y es cóncava en x para cada $x(t) \in A(t)$ y que

$$\underline{\lim}_{t \to \infty} \eta(t)(x(t) - x^*(T)) \geq 0.$$

Entonces $(x^*(t), u^*(t))$ es (CE) optimal.

No daremos aquí la demostración del teorema.

Obsérvese que si el conjunto $A(t)$ está definido por los $x(t) \geq 0$ entonces esta condición implica la usual en las aplicaciones a la economía (conocida como condición de Arrow)

$$\underline{\lim}_{t \to \infty} \eta(t) x^*(t) = 0.$$

4.3 Caso Autónomo y Proceso Lineal

En el caso particular en que el proceso está definido por la ecuación diferencial lineal

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

con costo

$$C(u) = \int_0^\infty f^0(x) + h^0(u) dt.$$

donde $f(x) \geq 0$ es convexa, $f(x) = 0$ si y solamente si $x = 0$, siendo $h^0(u) \geq a|u|^p$ estrictamente convexa y $h^0(0) = 0$ existe un control óptimo y una respuesta asociada para las que la solución $\bar{\eta}(t) = (\eta_0, \eta(t))$ verifica que $\eta_0 \neq 0$ y $\eta(\infty) = 0$. Ver [1].

[1] Se elige este criterio por ser el más usado en las aplicaciones a la teoría económica.

Agradecimiento. Deseo agradecer a Ramón García Cobian, por innumerables sugerencias y comentarios para mejorar estas notas.

Referencias

[1] LEE, E.; MARKUS, L. (1976). *Foundations of Optimal Control Theory.* The Siam Series in Applied Mathematics.

[2] SEIERSTAD, A. AND SYDSAETER, K. (1987). *Optimal control theory with economic applications.* North-Holland.

[3] TAKAYAMA, A. (1974). *Mathematical Economics.* Edited by The Dryden Press.

Elvio Accinelli
Falcultad de Ingeniería (IMERL) CC 30,
Montevideo-Uruguay
elvio@fing.edu.uy