EL TEOREMA DE DE RHAM-SAITO

Danny Joel Apaza Nuñez[1]

Agosto, 2012

Resumen

El teorema de De Rham-Saito es una generalización de un lema debido a De Rham [3], el cual fue enunciado y usado en [11] por Kyoji Saito, al no haber prueba de este teorema Lê Dũng Tráng anima a Saito a publicar la prueba que puede ser vista en [12], lo cual indirectamente nos motiva a detallar la prueba en este articulo por las muchas aplicaciones que tiene, destacamos el algoritmo de Godbillon-Vey [5]; en la prueba del Teorema de Frobenius clásico dada en [2]; en [8] vemos unas aplicaciones interesantes; en la prueba del Teorema de Frobenius con singularidades [7]; en [1] se detalla la prueba realizada por Moussu y Rolin [10].

MSC(2010): 13C15, 13D02.

Palabras clave: *1-formas, divisores de cero, profundidad, localización.*

1. *Sección Matemáticas, Departamento de Ciencias, PUCP.*

1. Producto Exterior de Módulos

En esta sección introduciremos convenientemente algunas operaciones sobre módulos, específicamente, el producto exterior de módulos.

Consideremos el producto tensorial k-veces $\otimes_R^k M$ del R-módulo M. Definiremos el submódulo $P^k(M) \subset \otimes_R^k M$ generado por el conjunto

$$\{m_1 \otimes \ldots \otimes m_k \in \otimes_R^k M \, : \, m_{i_0} = m_{i_0+1} \text{ para algún } i_0\}.$$

El módulo cociente $\bigwedge_R^k M = \dfrac{\otimes_R^k M}{P^k(M)}$ es llamado producto exterior k-veces del R-módulo M. Denotamos la clase de $m_1 \otimes \ldots \otimes m_k$ por esta relación de equivalencia como $m_1 \wedge_R \ldots \wedge_R m_k$ o simplemente como $m_1 \wedge \ldots \wedge m_k$ cuando no exista peligro de confusión. Observemos que la composición

$$\pi_2 : M \times \ldots \times M \xrightarrow{\pi} \otimes_R^k M \xrightarrow{\pi_1} \bigwedge_R^k M$$

de las proyecciones canónicas π_1 y π es una aplicación R-alternante. Entonces tenemos las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} (m + m') \wedge n &= m \wedge n + m' \wedge n, \\ m \wedge (n + n') &= m \wedge n + m \wedge n', \\ am \wedge n &= a(m \wedge n) = m \wedge an, \end{aligned}$$

inducidas por el producto tensorial. Además de estas propiedades, por la relación de equivalencia tenemos:

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_i \wedge \ldots \wedge v_i \wedge \ldots \wedge v_n = 0.$$

En particular:
$v_1 \wedge v_2 + v_2 \wedge v_1 = v_1 \wedge v_2 + v_1 \wedge v_1 + v_2 \wedge v_2 + v_2 \wedge v_1 = v_1 \wedge (v_2 + v_1) + v_2 \wedge (v_2 + v_1) = 0.$
A partir de este caso particular, por la propiedad asociativa tenemos:

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_{i+1} \wedge \ldots \wedge v_n = (-1)^i v_{i+1} \wedge v_1 \wedge \ldots \wedge v_i \wedge v_{i+2} \wedge \ldots \wedge v_n.$$

Proposición 1.1 (Propiedad Universal) Para cualquier aplicación R-alternante $f : M \times \ldots \times M \longrightarrow P$ existe una única aplicación $\overline{f} : \bigwedge_R^k M \longrightarrow P$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \times \cdots \times M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & M \\ & \bigwedge_R^k M \arrow[u, "\overline{f}"'] \end{tikzcd}$$

conmuta.

Prueba: La aplicación f induce

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{f} : \otimes_R^k M & \longrightarrow & P \\ m_1 \otimes \ldots \otimes m_k & \longmapsto & \widetilde{f}(m_1 \otimes \ldots \otimes m_k) = f(m_1, \ldots, m_k) \end{array}$$

Como f es R-alternante $\overline{f}$ se anula sobre $P^k(M)$, luego es independiente de las relaciones con la cual se define $\bigwedge_R^k M$, de esta manera induce la aplicación
$\overline{f} : \bigwedge_R^k M \longrightarrow P$ definida por:

$$\begin{array}{rcl} \overline{f} \circ \pi_2 & = & f \\ (\overline{f} \circ \pi_1 \circ \pi)(m_1, \ldots, m_k) & = & f(m_1, \ldots, m_k) \\ (\overline{f} \circ \pi_1)(\pi(m_1, \ldots, m_k)) & = & f(m_1, \ldots, m_k) \\ \overline{f} \circ \pi_1(m_1 \otimes \ldots \otimes m_k) & = & f(m_1, \ldots, m_k) \\ \overline{f}(m_1 \wedge \ldots \wedge m_k) & = & f(m_1, \ldots, m_k). \end{array}$$

Además, como $\pi_1 \circ \pi(M \times \ldots \times M) = \bigwedge_R^k M$ tenemos que $\overline{f}$ es única. $\square$

Consideremos V un espacio vectorial de dimensión finita.
Sea V espacio vectorial de dimensión m consideremos

$$T_i : V \longrightarrow \mathbb{R}, \; i = 1, \ldots, n;$$

a partir de esto obtenemos una n-forma alternada

$$T_1 \wedge \ldots \wedge T_n(v_1, \ldots, v_n) = \det(T_i(v_j)) \tag{1.1}$$

tenemos definida la función

$$f : V^* \times \cdots \times V^* \longrightarrow \mathrm{Alt}^k(V)$$

$f(T_1, \ldots, T_m)(v_1, \ldots, v_k) = \det\,(T_i(v_J))$, esto es
$f(T_1, \ldots, T_k) = T_1 \wedge \ldots \wedge T_k$, donde este producto exterior es definido como (1.1).

Puesto que f es alternante, por la propiedad universal, tenemos inducida una única aplicación lineal $\overline{f} : \bigwedge^k(V^*) \longrightarrow \mathrm{Alt}^k(V)$ por la relación.

$$\begin{aligned} \overline{f}(T_1 \wedge_R \ldots \wedge_R T_k) &= f(T_1, \ldots, T_k) \\ &= T_1 \wedge \ldots \wedge T_k \end{aligned} \tag{1.2}$$

La cual satisface las siguientes propiedades:

Proposición 1.2 1. $\overline{f}$ es un isomorfismo.

2. Si $(v_1, \ldots, v_n)$ es una base de V entonces
$B = \{v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_k} :\ i_1 < \ldots < i_k\}$ es una base de $\bigwedge^k(V)$.

3. Los espacios vectoriales $\bigwedge^k(V^*)$ y $\bigwedge^k(V)^*$ son isomorfos.

2. Localización en Anillos

Muchos de los resultados de esta sección son de tipo teórico y debido a sus aplicaciones diversas lo hace un tema indispensable. Es conocida por todos la construcción del cuerpo $\mathbb{Q}$ de los racionales a partir del anillo $\mathbb{Z}$, tomando pares de racionales con la segunda componente no nula. Aquí estableceremos la situación general para anillos y módulos.

Sea R un anillo conmutativo con elemento unidad. Un subconjunto multiplicativamente cerrado de R es un subconjunto S de R tal que $1 \in S$

y S es cerrado respecto a la multiplicación.

$$\begin{aligned} \text{Sea} \quad D &= R \times S \\ &= \{(a,s):\ a \in R,\ s \in S\}. \end{aligned}$$

Definimos una relación en D
$(a,s) \sim (a_1,s_1) \iff$ existe $s' \in S$ tal que $s's_1a = s'sa_1$ ó
$s'(s_1a - sa_1) = 0$, entonces $\sim$ es una relación de equivalencia.

La clase del par (a,s) será denotado por $\dfrac{a}{s}$. El conjunto de las clases de equivalencia se llama localización de R y se denota por R_S. Este cociente tiene estructura de anillo definido por las operaciones:

(1) $\dfrac{a}{s} + \dfrac{b}{t} = \dfrac{at+bs}{st}, \quad s,t \in S$

(2) $\dfrac{a}{s}\dfrac{b}{t} = \dfrac{ab}{st}$

este anillo es conmutativo con unidad $\bar{1} = \dfrac{s}{s}$.

Nota Si R es dominio $(a,s) \sim (a_1,s_1) \iff s_1a = a_1s$.

Proposición 2.1

1) Con las operaciones de suma y producto R_S es un anillo conmutativo en el que $\bar{1} = \dfrac{1}{1} = \dfrac{s}{s}$ es el elemento neutro de la multiplicación y $\bar{0} = \dfrac{0}{1}$ es el neutro para la suma.

2) $$\begin{aligned} R_S = \{\bar{0}\} &\iff 0 \in S \\ \bar{1} \neq \bar{0} &\iff 0 \notin S \end{aligned}$$

3) $R \xrightarrow{\varphi} R_S$ definido como $\varphi(a) = \dfrac{a}{1} = \dfrac{sa}{a}$ es un homomorfismo de anillos cuyo núcleo es Ker $(\varphi) = \{a \in R:\ sa = 0,\ \text{para algún } s \in S\}$.
De esta descripción del núcleo se desprende
$\dfrac{a}{1} = \bar{0}$ en $R_S \iff sa = 0$ para algún $s \in S$

4) Para $s \in S$ entonces $\dfrac{s}{1}$ tiene inversa $\dfrac{1}{s}$ en R_S

5) $x \in R_S$ entonces $x = \dfrac{a}{s} = \dfrac{a}{1}\dfrac{1}{s} = \dfrac{\varphi(a)}{\varphi(s)} = \varphi(a)\varphi(s)^{-1}$

Prueba:

1) Veamos inicialmente que $\bar{1} = \dfrac{s}{s}$, $s \in S$ es la unidad para la multiplicación. Para ello basta verificar $\dfrac{s}{s}.\dfrac{a}{t} = \dfrac{a}{t}$, para todo $\dfrac{a}{t}$ pero ello es consecuencia de la identidad $s(tsa) = s(sta)$ dado la conmutatividad de R.

Por otro lado $\bar{0} = \dfrac{0}{1}$ es el elemento neutro de la suma. Para ello basta verificar $\dfrac{0}{s} + \dfrac{a}{t} = \dfrac{a}{t}$, para todo $\dfrac{a}{t}$ pero ello es evidente de $t(as) = a(st)$

2) Si $R_S = \{\bar{0}\} \Rightarrow \bar{1} = \bar{0}$

$$\begin{aligned}
\frac{s}{s} = \frac{0}{s} \quad &\Rightarrow \quad \exists t(s^2 - s0) = 0 \\
&\Rightarrow \quad ts^2 = 0, \qquad t \in S,\ s \in S \\
&\Rightarrow \quad 0 \in S
\end{aligned}$$

Recíprocamente, si $0 \in S \Rightarrow \bar{1} = \bar{0} \quad \dfrac{s}{s} = \dfrac{0}{s} \Rightarrow 0(s^2 - s0) = 0$

3) φ es un homomorfismo de anillos con las operaciones definidas:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{1} + \frac{a'}{1} &= \frac{a + a'}{1.1} \\
\frac{a}{1}.\frac{a'}{1} &= \frac{aa'}{1.1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a \in \text{Ker } \varphi \quad &\Longleftrightarrow \quad \varphi(a) = \frac{a}{1} = \bar{0} = \frac{0}{1} \\
&\Longleftrightarrow \quad \text{existe } s \in S, \quad s(a - 0) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad sa = 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{lrcl}
4) & \dfrac{s}{1}.\dfrac{1}{s} & = & \dfrac{s}{s} = \bar{1} \\[2ex]
5) & x \in R_S \Rightarrow x = \dfrac{a}{s} & = & \dfrac{a}{1}.\dfrac{1}{s} \\
 & & = & \varphi(a)\varphi(s)^{-1}
\end{array}
$$

□

Proposición 2.2 Sea S un conjunto multiplicativamente cerrado en el anillo conmutativo R. Un anillo B es isomorfo a R_S si, y sólo si, existe $\phi : R \to B$ homomorfismo de anillos tal que:

1) $\text{Ker } \phi = \{a \in R : \; sa = 0 \;\; \text{para algún } s \in S\}$

2) Para todo $s \in S$, $\phi(s)$ es inversible en B ó equivalentemente
$\begin{array}{rcl} \widehat{\varphi(s)} : B & \to & B \\ b & \mapsto & \varphi(s)b \end{array}$, es una biyección

3) Para todo $b \in B$, existe $a \in R, \; s' \in S$ tal que $b = \phi(a)\phi(s)^{-1}$

Nota: La existencia de R_S se hizo usando la relación de equivalencia en
$R \times S/\sim, \; (a, s) \sim (a', s') \Longleftrightarrow t(s'a - a's) = 0$ para algún $t \in S$.

Prueba: 1) Si existe $R_S \overset{\psi}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} B$ isomorfismo de anillos, entonces

$$
\begin{array}{ccccc}
R & \xrightarrow{\varphi} & R_S & \overset{\psi}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} & B \\
a & \longmapsto & \frac{a}{1} & \longmapsto & \psi\left(\frac{a}{1}\right)
\end{array}
$$

Sea $\phi(a) = \psi\left(\frac{a}{1}\right) = \psi \circ \varphi(a)$

$$
\begin{array}{rcl}
a \in R/ \; a \in \text{Ker } \phi & \Longleftrightarrow & \psi\left(\dfrac{a}{1}\right) = 0 \Longleftrightarrow \dfrac{a}{1} = \dfrac{0}{1} \\[2ex]
\dfrac{a}{1} = \bar{0} \in R_S & \Longleftrightarrow & \text{existe } \; s \in S \text{ tal que } \; sa = 0
\end{array}
$$

2) Para todo $s \in S$, $\dfrac{s}{1} \in R_S$ tiene inverso $\dfrac{1}{s}$, entonces $\varphi(s) = \psi\left(\dfrac{s}{1}\right)$ tiene inverso $\psi\left(\dfrac{1}{s}\right)$

3) Para $b \in B \Rightarrow b = \psi(x),\ x \in R_S$

$$x = \frac{a}{s} = \frac{a}{1}.\frac{1}{s} = \frac{a}{1}\left(\frac{s}{1}\right)^{-1}$$

$$b = \psi(x) = \psi\left(\frac{a}{1}\right)\psi\left(\frac{s}{1}\right)^{-1} = \phi(a)\phi(s)^{-1}$$

Recíprocamente, se tiene $\phi : R \to B$ que cumple 1), 2) y 3).

Hay que demostrar que existe un isomorfismo $R_S \cong B$ definimos

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\varphi"'] & B \\ R_S \arrow[ur, dashed, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Sean $a \in R$ y $s \in S \Rightarrow \phi(s)$ tiene inverso en B entonces $\phi(a)\phi(s)^{-1} \in B$

φ es función:

$$\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'} \Rightarrow \varphi(a)\varphi(s)^{-1} = \varphi(a')\varphi(s')^{-1}$$

Pero $\dfrac{a}{s} = \dfrac{a'}{s'}$ en R_S, entonces existe $t \in S$ tal que $ts'a = tsa'$ en R

$$\begin{aligned} \varphi(t)\varphi(s')\varphi(s) &= \varphi(t)\varphi(s)\varphi(a') \\ \varphi(a)\varphi(s)^{-1} &= \varphi(a')\varphi(s')^{-1} \end{aligned}$$

Se verifica ψ es homomorfismo, inyectiva y sobreyectiva. □

3. Módulo de Fracciones

Vamos a pasar ahora a construir a partir del R-módulo M y del subconjunto multiplicativamente cerrado S de R un R_S-módulo denotado por M_S y que se llama el módulo de fracciones de M por S. Desarrollaremos de forma paralela a lo ya hecho en el caso de los anillos de fracciones.

Sean R un anillo conmutativo con unidad, $S \subset R$ un subconjunto multiplicativamente cerrado ($1 \in S$, si $s, t \in S \Rightarrow st \in S$) y M un R-módulo. Sobre $M \times S$ definimos la relación

$$(m, s) \sim (m', s') \Longleftrightarrow \text{existe } t \in S \text{ tal que } t(s'm - sm') = 0 \quad \text{en } M$$

que resulta ser una relación de equivalencia:

Sea M_S el cociente de $M \times S$ por la relación de equivalencia $\sim$ la clase de (m, s), donde $m \in M$ y $s \in S$ se denota por $\frac{m}{s}$. A M_S se la llama el localizado de M por S, este cociente tiene estructura de R_S-módulo con las operaciones:

$$\begin{aligned} \frac{m}{s} + \frac{m'}{s'} &= \frac{s'm + sm'}{ss'} \\ \frac{a}{s} . \frac{m'}{s'} &= \frac{am'}{ss'} \end{aligned}$$

Observaciones:

1. Por defininición de M_S

$$\begin{aligned} 0 = \frac{0}{1} = \frac{m}{s} &\Longleftrightarrow t(s0 - 1m) = 0 \\ &\Longleftrightarrow tm = 0 \text{ para algún } t \in S \end{aligned}$$

2. La aplicación

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & M_S \\ m & \mapsto & \varphi(m) = \dfrac{m}{1} \end{array}$$

es R-homomorfismo. Además

$$\begin{aligned} m \in \text{Ker } \varphi &\Longleftrightarrow \varphi(m) = \frac{m}{1} = 0 \\ &\Longleftrightarrow tm = 0 \quad \text{para algún } t \in S \end{aligned}$$

3. Para cada $s \in S$ la función

$$\begin{array}{ccc} M_S & \rightarrow & M_S \\ z & \mapsto & sz \end{array}$$

es una biyección.

Definición 3.1 Sea R, B anillos con unidad. El anillo B es un R-álgebra si existe $\rho : R \rightarrow B$ homomorfismo de anillos.

Observación Con las consideraciones anteriores B es un R-módulo con el producto $ab := \rho(a)b$ donde $a \in R$ y $b \in B$.

Proposición 3.1 Sea M un R-módulo libre de rango finito n y B un R-álgebra con unidad. Entonces

$$\left(\bigwedge^p M \right) \otimes_R B = \bigwedge^p \left(M \otimes_R B \right).$$

Prueba: Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ base de M, como M es R-módulo libre entonces del item 2 de la proposición 1.2 se tiene que

$$\{e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_p} : j_1 < \ldots < j_p\}$$

es una base de $\bigwedge^p M$. Si consideramos $e_J = e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_p}$ con $j_1 < \ldots < j_p$ se tiene que $e_J \otimes 1$, donde $1 \in B$ es la unidad de B, forman una base de $\left(\bigwedge^p M \right) \otimes_R B$. Por otro lado,

$$\{(e_{j_1} \otimes 1) \wedge \ldots \wedge (e_{j_p} \otimes 1) : j_1 < \ldots < j_p\}$$

es una base de $\bigwedge^p (M \otimes_R B)$ entonces se tiene el isomorfismo por ser libres y sus bases tener el mismo número de elementos. $\square$

4. Anillos y Módulos Noetherianos

Definición 4.1 Un anillo R es un anillo noetheriano si cualquier ideal de R es finitamente generado.

Las caracterizaciones siguientes suelen ser útiles:

Proposición 4.1 Son equivalentes:

i) R es noetheriano.

ii) Toda cadena ascendente de ideales

$$I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \cdots$$

se estabiliza, es decir, existe n tal que $I_n = I_{n+l}$, para todo $l \in \boldsymbol{N}$.

iii) Todo conjunto de ideales de R tiene un elemento maximal respecto a la inclusión.

Prueba: Para ello verificaremos:

i) $\rightarrow$ ii) Para una cadena como en ii). $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ es un ideal de R luego por hipótesis es finitamente generado $I = (r_1, \ldots, r_m)$, $r_i \in R$ para n suficientemente grande tendremos $r_i \in I_n$ $(i = 1, \ldots, m)$

$$I_n = I_{n+1} = \ldots$$

ii) $\rightarrow$ iii) Si existiera un conjunto D de ideales no vacío de R sin maximal podríamos tomar un ideal cualquiera I_1, que al no ser maximal estaría estrictamente contenido en otro ideal I_2 de D, que estaría contenido en otro ideal I_3 y así formaríamos una cadena ascendente infinita, lo cual contradice ii)

$$I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq I_3 \subsetneq \ldots$$

iii) $\rightarrow$ i) Sea I un ideal de R que no es finitamente generado entonces tomamos $r_1 \in I$ no nulo y se cumple $I \neq (r_1)$, luego existe $r_2 \in I \setminus (r_1)$ e $I \neq (r_1, r_2)$ luego existe $r_3 \in I \setminus (r_1, r_2)$ e $I \neq (r_1, r_2, r_3)$. De este modo construimos una cadena de ideales

$$(r_1) \subsetneq (r_1, r_2) \subsetneq (r_1, r_2, r_3) \subsetneq \ldots$$

que no tiene elemento maximal.

$\square$

Definición 4.2 Un R-módulo M es llamado noetheriano si cada submódulo U de M es finitamente generado.

Proposición 4.2 Si R es noetheriano y M es un R-módulo finitamente generado, entonces M es noetheriano.

5. Divisores de Cero

En esta sección uniremos algunos resultados sobre los divisores de cero de un anillo o un módulo.
Al conjunto de todos los ideales primos de un anillo R lo denotaremos por $\operatorname{Spec}(R)$ y será llamado el espectro de R.

Definición 5.1 Sea M un R-módulo. Un elemento de $a \in R$ es un divisor de cero de M si existe un elemento $m \neq 0$ tal que $am = 0$.

Si M es un R-módulo, El anulador de un elemento $m \in M$, será por definición el ideal de R

$$\operatorname{Ann}(m) = \{a \in R : \ am = 0\}$$

Definición 5.2 Sea M un módulo sobre un anillo R. El ideal $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ se dice que es asociado a M si existe un $m \in M$ tal que $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}(m)$.

El conjunto de ideales primos asociados de M será denotado por $\mathrm{Ass}(M)$. Si $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}(m)$ para $m \in M$, entonces $Rm \cong R/\mathfrak{p}$. Desde que $\mathrm{Ass}\,(M)$ es también el conjunto de $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\,(R)$ para el cual hay un submódulo de M isomorfo a $R/\mathfrak{p}$. Tenemos $\mathrm{Ann}\,(M) \subset \mathfrak{p}$ para todo $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\,(M)$.

Lema 5.1 Para todo $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\,(R)$ tenemos $\mathrm{Ass}(R/\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{p}\}$, y $\mathfrak{p}$ es el anulador de cualquier $x \neq 0$ en $R/\mathfrak{p}$.

Lema 5.2 Para cualquier submódulo $U \subset M$,

$$\mathrm{Ass}(U) \subset \mathrm{Ass}(M) \subset \mathrm{Ass}(U) \cup \mathrm{Ass}(M/U).$$

Prueba: Es claro que $\mathrm{Ass}(U) \subset \mathrm{Ass}(M)$. Si $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)\backslash\mathrm{Ass}(U)$ y $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}(m)$ para $m \in M$, entonces $Rm \cong R/\mathfrak{p}$ y $Rm \cap U\,\langle 0\rangle$, de otro lado por el lema 5.1 tenemos $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$. Bajo el epimorfismo canónico $M \to M/U$, Rm es mapeado en un submódulo de M/U isomorfo a $R/\mathfrak{p}$; esto es, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M/U)$. □

Proposición 5.1 Si R es noetheriano y $M \neq \langle 0\rangle$, entonces $\mathrm{Ass}(M) \neq \emptyset$.

Prueba: El conjunto de ideales que producen los anuladores de elementos $m \neq 0$ en M es no vacío y desde que contiene un elemento maximal $\mathfrak{p}$ por que R es noetheriano.
Mostraremos que $\mathfrak{p}$ es un ideal primo.

Sea $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}(m)$. Además, sean a, b elementos de R con $ab \in \mathfrak{p}$, $b \notin \mathfrak{p}$.
Luego $bm \neq 0$. Mas aún, $\mathfrak{p} \subset \mathrm{Ann}(bm)$; y de la maximalidad de $\mathfrak{p}$ tenemos $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}(bm)$. Desde que $abm = 0$ se sigue que $a \in \mathfrak{p}$. □

Proposición 5.2 Si R es noetheriano, entonces $\bigcup_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}(M)} \mathfrak{p}$ es el conjunto de divisores de cero de M.

Prueba: Los elementos de $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$ son obviamente divisores de cero de M.
Recíprocamente, si $rm = 0$ para algún $r \in R,\ m \in M,\ m \neq 0$, entonces $\mathrm{Ass}(Rm) \neq \emptyset$ por la proposición 5.1 y así existe $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ y $r' \in R$ con $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}(r'm)$. Desde que $rr'm = 0$, se sigue que $r \in \mathfrak{p}$. □

En particular conseguimos que el conjunto de divisores de cero de un anillo noetheriano es la unión de los ideales primos asociados del anillo.

Proposición 5.3 Sea M un módulo finitamente generado sobre un anillo noetheriano R. Entonces hay una cadena de submódulos

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_n = \langle 0 \rangle$$

tales que $M_i/M_{i+1} \cong R/\mathfrak{p}_i$ para algún $\mathfrak{p}_i \in \mathrm{Spec}(R)$ para $i = 0, \ldots, n-1$.

Prueba: Sea $M \neq \langle 0 \rangle$. El conjunto A de submódulos $\neq \langle 0 \rangle$ de M para el cual la proposición es correcta es no vacía, por la proposición 5.1 M contiene un submódulo isomorfo a $R/\mathfrak{p}$ para algún $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$. Desde que M es un módulo noetheriano, existe un elemento maximal N en A.

Si tenemos $M \neq N$, entonces M/N contendría un submódulo isomorfo a $R/\mathfrak{q}$ para algún $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(R)$. Si N' es la imagen inversa de este submódulo bajo el epimorfismo canónico $M \to M/N$, entonces $N'/N = R/\mathfrak{q}$, contradiciendo la propiedad maximal de N. Se sigue que $N = M$, y la proposición es probada. □

Corolario 5.3 Para un módulo finitamente generado M sobre un anillo noetheriano R, $\mathrm{Ass}(M)$ es un conjunto finito. En particular, $\mathrm{Ass}(R)$ es finito.

Prueba: De los lemas 5.1 y 5.2 seguimos que $\mathrm{Ass}(M) \subset \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1}\}$ si los $\mathfrak{p}_i$ son ideales primos de la proposición 5.3. □

Corolario 5.4 Sea M un módulo finitamente generado sobre un anillo noetheriano R. Si un ideal I de R consta solo de divisores de cero de M, entonces existe
$m \in M$, $m \neq 0$, tal que $Im = \langle 0 \rangle$.

Prueba: De $I \subset \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)} \mathfrak{p}$ vemos, porque $\mathrm{Ass}(M)$ es finito, así $I \subset \mathfrak{p}$ para algún $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$; se sigue la afirmación. □

6. Profundidad

En esta sección debemos precisar de manera algebraica la definición de dimensión que vamos a usar. Para ello daremos una definición completamente general de profundidad.

Definición 6.1 Sea M un R-módulo. $a \in R$ es llamado un elemento M-regular (o un no divisor de cero de M) si $ax = 0$ entonces $x = 0$ con $x \in M$. Una sucesión $\{a_1, \ldots, a_m\}$ $(m \geq 1)$ de elementos de R es llamada una sucesión M-regular si

a) $M \neq (a_1, \ldots, a_m)M$.

b) a_{i+1} es un no divisor de cero de $\dfrac{M}{(a_1, \ldots, a_i)M}$ para $i = 1, \ldots, m-1$.

Sea M un módulo finitamente generado sobre un anillo noetheriano R, I un ideal de R con $IM \neq M$. Para cualquier sucesión M-regular $\{a_1, \ldots, a_m\}$ tenemos $(a_1, \ldots, a_i)M \not\supseteq (a_1, \ldots, a_{i+1})M$ para $i = 1, ..., m-1$. Desde que M es un módulo noetheriano, se sigue inmediatamente que cualquier sucesión M-regular $\{a_1, \ldots, a_m\}$ con elementos $a_i \in I$ puede ser extendida a una sucesión maximal, es decir para una sucesión M-regular $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset I$ $(n \geq m)$ tales que cualquier $a \in I$ es un divisor de cero de $\dfrac{M}{(a_1, \ldots, a_n)M}$. Ahora podemos enunciar los siguientes resultados

Lema 6.1 Si $\{a, b\}$ es una sucesión M-regular y b es un no divisor de cero de M, entonces $\{b, a\}$ es también una sucesión M-regular.

Prueba: Si a fuese un divisor de cero de $\dfrac{M}{bM}$, existiría un $m \in M$, $m \notin bM$ con $am = bm'$ con $m' \in M$. Ya que $\{a, b\}$ es una sucesión M-regular tenemos que $m' \in aM$, de esto $m' = am''$ con $m'' \in M$; luego $m = bm''$, desde que a es un no divisor de cero M lo cual contradice nuestra suposición que $m \notin bM$. $\square$

Proposición 6.1 Cualesquiera dos sucesiones maximales M-regulares en I tienen el mismo número de elementos.

Prueba: Entre todas las sucesiones maximales M-regulares en I hay una con el menor número de elementos n. Haremos la prueba por inducción sobre n. Si $n = 0$, entonces I solo consta de divisores de cero de M y no hay nada que demostrar. De aquí para $n > 0$, sea $\{a_1, \ldots, a_n\}$ una sucesión maximal M-regular en I, y sea $\{b_1, \ldots, b_n\}$ otra sucesión maximal M-regular en I. Debemos mostrar que I consta solo de divisores de cero de $\dfrac{M}{(b_1, \ldots, b_n)\, M}$.

Si $n = 1$, entonces I solo consta de divisores de cero de $\dfrac{M}{a_1 M}$. Por el corolario 5.4 hay un $m \in M$, $m \notin a_1 M$ con $Im \subset a_1 M$. En particular, $b_1 m = a_1 m'$ con algún $m' \in M$. Si tenemos $m' \in b_1 M$, entonces tendríamos $m \in a_1 M$, así $m' \notin b_1 M$. De $a_1 I m' = I b_1 m \subset a_1 b_1 M$ se sigue que $Im' \subset b_1 M$, y por lo tanto I solo consta de divisores de cero de $\dfrac{M}{b_1 M}$.

Si $n > 1$, hacemos $M_i := \dfrac{M}{(a_1, \ldots, a_i)\, M}$, $M_i' := \dfrac{M}{(b_1, \ldots, b_i)\, M}$ para $i = 0, \ldots, n-1$, y escogemos $c \in I$ que es un no divisor de cero de M_i y M_i' para todo $i = 0, \ldots, n-1$. Esto es posible, desde que el conjunto de divisores de cero de M_i y M_i' son uniones finitas de ideales primos e I no está contenido en ninguno de estos conjuntos.

Aplicando el lema 6.1 repetidas veces se sigue que ambas $\{c, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ y $\{c, b_1, \ldots, b_{n-1}\}$ son sucesiones M-regulares en I donde $\{c, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ es maximal, para $\{a_1, \ldots, a_{n-1}, c\}$ es maximal sobre la base del caso $n = 1$ (aplicado a M_{n-1}) visto anteriormente. Luego $\{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ y $\{b_1, \ldots, b_{n-1}\}$ son sucesiones M/cM-regulares en I; el primero es maximal, así por la hipótesis inductiva el segundo también lo es. Pero si $\{b_1, \ldots, b_{n-1}, c\}$ es una sucesión maximal M-regular, entonces $\{b_1, \ldots, b_n\}$ también lo es, nuevamente por el caso $n = 1$.

Esto prueba la proposición. $\square$

Definición 6.2 Con las hipótesis de la proposición 6.1 el número de elementos de una sucesión maximal M-regular en I es llamada la I-profundidad de M lo denotaremos por $\operatorname{prof}(I, M)$ o el grado de M con respecto a I. Si R es local e I es el ideal maximal de R, entonces llamaremos a $\operatorname{prof}(I, M)$ simplemente la profundidad de M y escribiremos $\operatorname{prof}(M)$.

Corolario 6.2 Tenemos

$$\operatorname{prof}\left(I, \frac{M}{(a_1, \ldots, a_n)\, M}\right) = \operatorname{prof}(I, M) - n.$$

Prueba: Consideremos $\{a_1, \ldots, a_m\}$ una sucesión M-regular maximal, luego por la proposición 6.1 tenemos $\operatorname{prof}(I, M) = m$. Debemos verificar entonces $\operatorname{prof}(I, N) = m - n$ donde

$$N = \frac{M}{(a_1, \ldots, a_n)M}$$

para ello basta verificar que $a_{n+1}, \ldots, a_{m+(n-m)} \in I$ forman una sucesión N-regular maximal. En efecto, como $\{a_1, \ldots, a_m\}$ es una sucesión M-regular tenemos que a_{n+1} no es un divisor de cero de N. Por otro lado a_{n+2} no es un divisor de cero de

$$\frac{N}{(a_{n+1})N} = \frac{\dfrac{M}{(a_1, \ldots, a_n)M}}{\dfrac{(a_{n+1})M}{(a_1, \ldots, a_n)M}} = \frac{M}{(a_1, \ldots, a_{n+1})M}$$

si seguimos con el proceso hasta $n+(m-n)$, tenemos que $a_m = a_{n+(m-n)}$ no es un divisor de cero de

$$\frac{N}{(a_{(n+(m-n))})N} = \frac{M}{(a_1, \ldots, a_m)M}.$$

Así tenemos que la sucesión $a_{n+1}, \ldots, a_{m+(n-m)} \in I$ forman una sucesión N-regular. Por otro lado esta sucesión es maximal pues sino tendríamos que $\{a_1, \ldots, a_m\}$ no sería maximal. Por lo tanto de la proposición 6.1 obtenemos el resultado deseado. $\square$

Utilizaremos este resultado para el caso $M = R$ en la prueba de la parte ii) del teorema de De Rham-Saito

7. Teorema de De Rham-Saito

En esta sección desarrollaremos el tema central de estudio, utilizando las herramientas desarrolladas anteriormente.

Sea M un R-módulo libre de rango finito n. Denotemos por $\bigwedge^p M$ al p-ésimo producto exterior de M con

$$\bigwedge^0 M = R \text{ y } \bigwedge^{-1} M = 0.$$

Dados $\omega_1, \ldots, \omega_k$ elementos de M, y $(e_1, \ldots, e_n)$ es una base libre de M,

$$\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} a_{i_1 \ldots i_k} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}$$

Sea I el ideal de R generado por los coeficientes $a_{i_1 \ldots i_k}$, donde $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$. Consideramos $I = R$, cuando $k = 0$.
Entonces definimos:

$$Z^p := \{\omega \in \bigwedge^p M : \omega \wedge \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k = 0\} \qquad ,p = 0, 1, 2, \ldots$$

$$H^p := \frac{Z^p}{\left(\sum_{i=1}^{k} \omega_i\right) \wedge \bigwedge^{p-1} M} \qquad ,p = 0, 1, 2, \ldots$$

Cuando $k = 0$, entenderemos $Z^p = 0$, $H^p = 0$ para $p = 0, 1, 2, \ldots$.
El espacio H^p es un R-módulo con la multiplicación

$$r[\omega] := [r\omega]$$

donde $r \in R$ y $[\omega] \in H^p$.

Lema 7.1 $I = (a_1, \ldots, a_k)$ ideal de R, N un R-módulo y $a_j^{n_j} N = 0$ para todo $1 \leq j \leq k$ entonces existe m tal que $I^m N = 0$.

Prueba: Sea $m = n_1 + \cdots + n_k$ e $I^m = \left(a^{i_1} \ldots a^{i_k} : \ i_1 + \cdots + i_k = m\right)$ entonces $\left(a_1^{i_1} \ldots a_k^{i_k}\right) M = 0$ y por ello es suficiente mostrar que existe j

tal que $i_j \geq n_j$ para ello supongamos que $i_j < n_j$ para todo j tenemos por un lado $i_1 + \cdots + i_k = m$ y por el otro $n_1 + \cdots + n_k = m$, así, $m < m$ una contradicción. $\square$

Teorema 7.1 (de Rham-Saito) Con las consideraciones dadas anteriormente tenemos:

i) Existe un entero $m \geqslant 0$ tal que:

$$I^m H^p = 0 \text{ para } p = 0, 1, \ldots, n.$$

ii) $H^p = 0$ para $0 \leqslant p < \operatorname{prof}(I)$.

Prueba: Prueba de i). Con el lema 7.1 en nuestras manos nos resta mostrar que para cualquier $\omega \in Z^p$ y cualquier coeficiente $a_{i_1 \ldots i_k}$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$, existe un entero $m \geqslant 0$ de tal manera que

$$(a_{i_1 \ldots i_k})^m \omega \in \left(\sum_{i=1}^{k} \omega_i \right) \wedge \bigwedge^{p-1} M.$$

- Si $a_{i_1 \ldots i_k}$ es nilpotente, entonces no hay nada para demostrar.
- Supongamos $a_{i_1 \ldots i_k} = a$ no es nilpotente y sea $R_{(a)}$ la localización de R por las potencias de $a = a_{i_1 \ldots i_k}$. Hay un morfismo canónico $R \to R_{(a)}$ y denotamos por $[\omega]$ la imagen de $\omega \in \bigwedge^p M$ en $\left(\bigwedge^p M \right) \bigotimes_R R_{(a)}$ y de la proposición 3.1 tenemos

  $$\left(\bigwedge^p M \right) \otimes_R R_{(a)} = \bigwedge^p \left(M \otimes_R R_{(a)} \right) \text{ pues } M \text{ es libre sobre } R$$

  Ya que el ideal en $R_{(a)}$ generado por los coeficientes de $[\omega_1] \wedge \ldots \wedge [\omega_k]$ contiene la imagen de $a = a_{i_1 \ldots i_k}$ en $R_{(a)}$, que coincide con $R_{(a)}$ y podemos considerar $[\omega_1], \ldots, [\omega_k]$ como una parte de la base libre de $M \bigotimes_R R_{(a)}$. Agregamos algunos elementos $[e_1], \ldots, [e_{n-k}]$ tales que

  $$[\omega_1], \ldots, [\omega_k], [e_1], \ldots, [e_{n-k}],$$

formen una base de $M \bigotimes_R R_{(a)}$. Así, cualquier elemento

$$[\omega] \in \bigwedge^p \left(M \bigotimes_R R_{(a)} \right)$$

puede ser desarrollado en la forma:

$$[\omega] = \sum_{l+m=p} \sum_{\substack{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_l \leqslant k \\ 1 \leqslant j_1 < \ldots < j_m \leqslant n-k}} a_{i_1 \ldots i_k, j_1 \ldots j_{n-k}} [\omega_{i_1}] \wedge \ldots \wedge [\omega_{i_k}] \wedge [e_{j_1}] \wedge \ldots \wedge [e_{j_m}].$$

Entonces el hecho de $[\omega] \wedge [\omega_1] \wedge \ldots \wedge [\omega_k] = 0$ equivale a la existencia de algunos $\eta_i' \in \bigwedge^{p-1} \left(M \bigotimes_R R_{(a)} \right)$, $i = 1, \ldots, k$ con $[\omega] = \sum_{i=1}^k \eta_i' \wedge [\omega_i]$. Tomemos $\eta_i \in \bigwedge^{p-1} M$ y $m_1 \geqslant 0$ con

$$\eta_i' = a^{-m_1} [\eta_i] \quad i = 1, \ldots, k.$$

Entonces tenemos:

$$\begin{aligned}
\left[a^{m_1} \omega - \sum_{i=1}^k \eta_i \wedge \omega_i \right] &= a^{m_1} [\omega] - \sum_{i=1}^k [\eta_i] \wedge [\omega_i] \\
&= a^{m_1} \left(\sum_{i=1}^k \eta_i' \wedge [\omega_i] \right) - \sum_{i=1}^k [\eta_i] \wedge [\omega_i] \\
&= a^{m_1} \left(\sum_{i=1}^k a^{-m_1} [\eta_i] \wedge [\omega_i] \right) \\
&\quad - \sum_{i=1}^k [\eta_i] \wedge [\omega_i] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por la definición de $R_{(a)}$, existe algún $m_2 \geqslant 0$ tal que

$$a^{m_2} \left\{ a^{m_1} \omega - \sum_{i=1}^k \eta_i \wedge \omega_i \right\} = 0 \quad \text{en} \quad \bigwedge^p M.$$

Esto completa la prueba de i).

Prueba de ii). Lo probaremos por doble inducción sobre (p, k) para p, $k \geqslant 0$.

- En el caso $k = 0$, la afirmación es trivialmente cierta por la definición de H^p.
- Caso $p = 0$. En este caso

$$
\begin{aligned}
H^0 = \frac{Z^0}{\left(\sum_{i=1}^{k} \omega_i\right) \wedge \bigwedge^{-1} M} &= \frac{Z^0}{\{0\}} = Z^0 \\
&= \left\{\omega \in \bigwedge^{0} M : \ \omega \wedge \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k = 0\right\}
\end{aligned}
$$

Sea $\omega \in Z^0$, esto es

$$
\begin{aligned}
0 &= \omega\left(\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k\right) \\
&= \omega a_1 (e_1 \wedge \ldots \wedge e_k) + \cdots + \omega a_k (e_1 \wedge \ldots \wedge e_k)
\end{aligned}
$$

tenemos por ser una base

$$
\omega a_j = 0 \qquad \text{para todo } j \qquad (*)
$$

Tenemos que $I = (a_1, \ldots, a_k)$ y la prof $I > p \geq 0$ entonces existe $b \in (a_1, \ldots, a_k)$ un no divisor de cero, luego

$$
b = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_k a_k
$$

multiplicando por ω obtenemos de $(*)$

$$
\omega b = \alpha_1 \omega a_1 + \cdots + \alpha_k \omega a_k = 0
$$

como b es un no divisor de cero tenemos

$$
\omega = 0
$$

Por lo tanto $H^0 = Z^0 = 0$.

- Caso $0 < p < \text{prof}(I)$ y $(0 < k)$
  La hipótesis inductiva es cierta para $(p-1, k)$ y $(p, k-1)$ la afirmación ii) del teorema es verdadera.
  Sea $a \in I$ un no divisor de cero de R. De acuerdo a i), existe un entero $m > 0$ con $a^m H^p = 0$. Desde que $a \in I$ es un no divisor de cero de R entonces $a^m \in I^m$ es también un no divisor de cero de R por lo tanto asumiremos $m = 1$, es decir, $aH^p = 0$. De la proposición 3.1

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge^p M & \longrightarrow & \left(\bigwedge^p M\right) \bigotimes_R \left(\dfrac{R}{aR}\right) \simeq \bigwedge^p \left(M \bigotimes_R \left(\dfrac{R}{aR}\right)\right). \\ \omega & \longmapsto & \overline{\omega} := \omega \otimes \overline{1} \end{array} \qquad (**)$$

Para $\omega \in Z^p = \left\{\omega \in \bigwedge^p M : \omega \wedge \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k = 0\right\}$, de la definición de H^p, la clase $[\omega] \in H^p$ tiene la forma

$$[\omega] = \omega + \sum_{i=1}^{k} \omega_i \wedge \bigwedge^{p-1} M$$

luego

$$\begin{aligned} 0 = a[\omega] = [a\omega] &\Rightarrow a\omega \in \sum_{i=1}^{k} \omega_i \wedge \bigwedge^{p-1} M \\ &\Rightarrow a\omega = \sum_{j=1}^{k} \eta_j \wedge \omega_j, \quad \eta_j \in \bigwedge^{p-1} M \qquad (***) \end{aligned}$$

Aplicando el homomorfismo $(**)$

$$\sum_{j=1}^{k} \overline{\eta_j} \wedge \overline{\omega_j} = \overline{a\omega} = a\omega \otimes_R \overline{1} = \omega \otimes_R \overline{a1} = \omega \otimes_R \overline{a} = \omega \otimes_R \overline{0} = 0$$

Para cualquier $1 \leqslant j \leqslant k$ conseguimos:

$$\begin{aligned} \overline{\eta}_j \wedge \overline{\omega}_1 \wedge \ldots \wedge \overline{\omega}_k &= \left(\sum_{i=1}^{k} \overline{\eta}_i \wedge \overline{\omega}_i\right) \wedge \\ &\quad \left((-1)^{j-1} \overline{\omega}_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\overline{\omega}_j} \wedge \ldots \wedge \overline{\omega}_k\right) = 0. \end{aligned}$$

Aquí el símbolo ˆ significa, que omitimos el término correspondiente.
Desde que el ideal de R/aR generado por los coeficientes de $\overline{\omega}_1 \wedge \ldots \wedge \overline{\omega}_k$ es igual a I/aR y por el corolario 6.2 tenemos

$$\operatorname{prof}(I, R/aR) = \operatorname{prof}(I, R) - 1 \geqslant p - 1 \geqslant 0,$$

podemos aplicar a $\overline{\eta}_j$ la hipótesis inductiva para $(p-1, k)$, esto es, existen
$\xi_{ji} \in \bigwedge^{p-2} M, \ j, i = 1, \ldots, k,$ tales que,

$$\overline{\eta}_j = \sum_{i=1}^{k} \overline{\xi}_{ji} \wedge \overline{\omega}_i, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Los coeficientes de

$$\overline{\eta_j - \sum_{i=1}^{k} \xi_{ji} \wedge \omega_i} = \overline{\eta_j} - \sum_{i=1}^{k} \overline{\xi_{ji}} \wedge \overline{\omega_i} = 0, \quad j = 1, \ldots, k$$

están en $\dfrac{R}{aR}$ y como son ceros en este cociente los coeficientes de la forma de $\eta_j - \sum_{i=1}^{k} \xi_{ji} \wedge \omega_i$ son múltiplos de a luego existen $\zeta_j \in \bigwedge^{p-1} M, \ j = 1, \ldots, k$, tales que:

$$\eta_j = \sum_{i=1}^{k} \xi_{ji} \wedge w_i + a\zeta_j \ , \quad j = 1, \ldots, k.$$

Reemplazando η_j en $(***)$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
a\omega &= \sum_{i=1}^{k} \eta_j \wedge \omega_i \\
&= \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{k} \xi_{ji} \wedge \omega_i + a\zeta_j \right) \wedge \omega_j \\
&= \left(\sum_{i,j=1}^{k} \xi_{ji} \wedge \omega_i + \sum_{j=1}^{k} a\zeta_j \right) \wedge \omega_j \\
a\left(\omega - \sum_{j=1}^{k} \zeta_j \wedge \omega_j \right) &= \sum_{i,j=1}^{k} \xi_{ji} \wedge \omega_i \wedge \omega_j .
\end{aligned}$$

Multiplicando por $\omega_2 \wedge \ldots \wedge \omega_k$, tenemos:

$$a\left(\omega - \sum_{j=1}^{k} \zeta_j \wedge \omega_j \right) \wedge \omega_2 \wedge \ldots \wedge \omega_k = 0.$$

Desde que a es un no divisor de cero de R, tenemos:

$$\left(\omega - \sum_{j=1}^{k} \zeta_j \wedge \omega_j \right) \wedge \omega_2 \wedge \ldots \wedge \omega_k = 0.$$

Desde que el ideal I' generado por los coeficientes de $\omega_2 \wedge \ldots \wedge \omega_k$ contienen al ideal I, tenemos $\operatorname{prof}(I') \geqslant \operatorname{prof}(I) > p$. Nuevamente por hipótesis inductiva para $(p, k-1)$, conseguimos algunos $\theta_j \in \bigwedge^{p-1} M,\ j = 2, \ldots, k$ con

$$\omega - \sum_{i=1}^{k} \zeta_i \wedge \omega_i = \sum_{j=2}^{k} \theta_j \wedge \omega_j .$$

Esto nos permite concluir la prueba de ii).

$\square$

Referencias

[1] Apaza, D.: *El Teorema de De Rham-Saito y el Teorema de Frobenius con Singularidades*. Tesis de Maestria, PUCP, Lima-Perú, 2012.

[2] Camacho, C.; Lins N., A.: *Teoria Geométrica das Folheações* IMPA.(1979).

[3] de Rham, G.: *Sur la division de formes et de courants par une forme linéaire*. Commentarii mathematici Helveteci, Volume 28, 1954.

[4] Godbillon, C.; Vey, J.: *Un invariant des feuilletages de codimension un*. Comptes rendus Acad. Sc. Paris, 273, (1971), 92-95.

[5] Malgrange, B.: *Frobenius avec Singularités 1. Codimension un*. Publ. Math. I.H.E.S., 46, (1976) 162-173.

[6] Mattei, J. F.; Moussu, R.: *Holonomie et intégrales premières*. Ann.Sci. Ec. Norm. Sup., 4, t.13, (1980), 469-523.

[7] Saito, K.: *Calcul algébrique de la monodromie*. Société Mathématique de France, Astérisque, 7 et 8, (1973), 195-212.

[8] Saito, K.: *On Generalisation of de Rham Lemma*. Ann. Inst. Fourier, vol. 26, fasc. 2, 1976, 165-170.

Abstract

The theorem of De Rham-Saito is a generalization of a lemma due to De Rham [3], which was announced and used in [7] by Kyoji Saito, as no proof of this theorem was available, Lê Dũng Tráng encouraged to Saito to publish the proof that can be seen in [8], which indirectly encourages us to detail the proof in this article for the many applications it has, we highlight the Godbillon-Vey algorithm [4]; in the proof of Theorem classical Frobenius given in [2]; in [6] we see some interesting applications,

in the proof of Frobenius theorem with singularities [5]. In [1] we give full details of the proof given by Moussu and Rolin.

Keywords: 1-forms, zero divisors, depth, localization.

Danny Joel Apaza Nuñez
Sección Matemática Departamento de Ciencias
Pontificia Universidad Católica del Perú
apaza.dj@pucp.edu.pe