DESCOMPOSICIÓN PRIMARIA Y CAMPOS LOGARÍTMICOS

Percy Fernández Sánchez[1]

Setiembre, 2012

Resumen

Se da una descripción del espacio de campos polinomiales tangentes a una curva algebraica dada

MSC(2010): 32B10, 34M45.

Palabras clave: *Curvas algebraicas invariantes, Descomposición primaria, Campos logarítmicos.*

1. *Sección Matemáticas, Departamento de Ciencias, PUCP.*

1. Introducción

El estudio de los campos logarítmicos fue iniciado por Deligne [1], él estudió estos campos a lo largo de uniones de subvariedades regulares dos a dos transversales. Posteriormente, Saito [7] generalizó el trabajo de Deligne estudiando los campos logarítmicos a lo largo de hipersuperficies analíticas. Ambos fueron motivados a estudiar estos campos para aplicarlos a la Teoría de Deformaciones de Singularidades de espacios analíticos. En cambio, el interés de Paul [6] para estudiar los campos logarítmicos a lo largo de una curva analítica casihomogenea fue el de clasificar analíticamente las foliaciones holomorfas con una separatriz casihomogenea. Nuestro estudio, sin embargo es más cercano al realizado por Walcher [9], él se interesó en estudiar los campos logarítmicos como una herramienta para determinar los campos polinomiales tangentes a una curva fija.

2. Preliminares

Una **curva algebraica** C son los ceros de algún polinomio $F \in \mathbb{C}[X,Y]$ no constante, esto es

$$C : F(X,Y) = 0$$

donde (X,Y) son coordenadas afines. Evidentemente, los ceros de λF, $\lambda \in \mathbb{C}^*$ determinan también C, por eso es que se identifica C con $(F) = \{\alpha F / \alpha \in \mathbb{C}^*\}$. El conjunto singular de la curva C esta definida por los ceros de las derivadas parciales de F.

$$\operatorname{Sing} C = \left\{ p \in \mathbb{C}^2 : \ \frac{\partial F}{\partial X}(p) = \frac{\partial F}{\partial Y}(p) = 0 \right\}$$

Un **campo vectorial polinomial** V en coordenadas afines (X,Y) se expresa

$$V = P\frac{\partial}{\partial X} + Q\frac{\partial}{\partial Y}$$

donde $P, Q \in \mathbb{C}[X, Y]$. En conjunto de todos los campos polinomiales algebraico en el plano complejo lo representaremos por $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}[X,Y]}$.

Como el espacio tangente a C en un punto p esta formada por vectores $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ que satisfacen la ecuación.

$$T_pC : \frac{\partial F}{\partial X}(p) \cdot u + \frac{\partial F}{\partial Y}(p) \cdot v = 0,$$

para todo $p \in C$. Luego, si C es invariante por un campo vectorial V tenemos que el polinomio

$$\frac{\partial F}{\partial X} \cdot P + \frac{\partial F}{\partial Y} \cdot Q$$

se anula en la curva $C : \; F(X, Y) = 0$, por el Teorema de los ceros de Hilbert [2] se tiene

$$\frac{\partial F}{\partial X} \cdot P + \frac{\partial F}{\partial Y} \cdot Q = RF \tag{2.1}$$

para algún polinomio R, considerando que F sea reducida.

El **ideal jacobiano** $J(F)$ del polinomio F es el ideal del anillo $\mathbb{C}[X, Y]$ generado por los polinomios $\frac{\partial F}{\partial X}$ y $\frac{\partial F}{\partial Y}$. El espacio de los polinomios R en la relación (2.1) es el ideal cociente de ideal jacobiano $J(F)$ por ideal generado por F esto es

$$(J(F) : (F))^1$$

Definición 1. El espacio de los campos tangentes a una curva $C : F(X, Y) = 0$ definida por el polinomio irreducible F es un $\mathbb{C}[X, Y]$-módulo

$$\mathrm{Der}(\log C) = \{V : \; C \text{ es invariante por el campo vectorial } V\}$$

Un elemento de este módulo es llamado **campo vectorial logarítmico** a lo largo de C

[1]Si I y J son ideales de un anillo A definimos el ideal cociente de I por J como el ideal $(I : J) = \{a \in A / aJ \subset I\}$

Evidentemente los ideales están relacionados por las inclusiones

$$J(F) \subseteq (J(F) : F) \subset \mathbb{C}[X, Y]$$

El caso extremo cuando las inclusiones extremas coinciden, se caracteriza en la siguiente

Proposición 1. Si $C : \; F(X, Y) = 0$ es una curva algebraica definido por la ecuación reducida F. Si $J(F) = \mathbb{C}[X, Y]$ entonces $\mathrm{Der}(\log C)$ como $\mathbb{C}[X, Y]$-módulo esta generado por los campos vectoriales V_0 y V_1 que satisfacen la propiedad

$$V_0(F) = 1 \text{ y } V_1(F) = 0.$$

Prueba: La hipótesis $J(F) = \mathbb{C}[X, Y]$ implica que existe un campo vectorial V_0 tal que

$$V_0(F) = 1$$

Luego, como V deja invariante $F = 0$ se tiene $V(F) = RF$ luego

$$V(F) = RF = RF \cdot V_0(F)$$

esto es

$$(V - RFV_0)(F) = 0 \tag{2.2}$$

Por lo tanto, el problema se reduce a probar que hallar los campos V tales que $V(F) = 0$. Para ello consideremos

$$\sigma = \mathrm{mcd}\left(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}\right), \; \frac{\partial F}{\partial X} = \sigma\psi_1 \text{ y } \frac{\partial F}{\partial Y} = \sigma\psi_2$$

como

$$\begin{aligned} 0 = V(F) \quad &= \quad \frac{\partial F}{\partial X}P + \frac{\partial F}{\partial Y}Q \\ &= \quad \sigma\psi_1 P + \sigma\psi_2 Q \end{aligned}$$

tenemos ψ_1 divide Q y ψ_2 divide P entonces $V = SV_1$ donde

$$V_1 = -\psi_2\frac{\partial}{\partial X} + \psi_1\frac{\partial}{\partial Y} \tag{2.3}$$

Por lo tanto de (2.2) y (2.3) tenemos

$$\mathrm{Der}(\log C) = \mathbb{C}[X,Y]\, V_0 + \mathbb{C}[X,Y]\, V_1.$$

□

Desde ahora en adelante podemos asumir

$$J(F) \neq \mathbb{C}[X,Y]$$

Con la finalidad de determinar los campos logarítmicos en una situación general utilizaremos la Descomposición Primaria

3. Descomposición Primaria

Es bien conocido del Teorema Fundamental de la Aritmética, probado por Gauss [3] que todo número entero se puede expresar como un producto finito de los números primos, esto es todo número primo $n \in \mathbb{Z}$, diferente de cero y una unidad (esto es, $u = \pm 1$), se puede expresar de modo único a menos de orden como

$$n = up_1^{r_1} \ldots p_k^{r_k} \tag{3.1}$$

donde u es una unidad en $\mathbb{Z}$, los r_i, $i = 1, \ldots k$ son enteros positivos o cero y los p_i, $i = 1, \ldots, k$ son primos dos a dos distintos. Un dominio de integridad en la que todo elemento diferente de cero y de una unidad se pueda escribir como un producto de una unidad y un número finitos de primos, es llamado dominio de factorización única. Ejemplos de estos anillos son los enteros y el anillo de los polinomios, en una y varias variables. Sin embargo, hay dominios de integridad que no cumplen con las propiedades exigidas para que el dominio sea de factorización única. Por ejemplo, en el dominio

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{m + n\sqrt{-5} : \ m, n \in \mathbb{Z}\}$$

tenemos $6 = (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5}) = 2{,}3$, es decir dos expresiones distintas para 6. Otro ejemplo es el anillo de coordenadas

$$\mathbb{C}[S] = \frac{\mathbb{C}[X,Y,Z]}{(Z^2 - XY)}$$

de la superficie algebraica $S: \; Z^2 = XY$, si denotamos por $p \in \mathbb{C}[S]$ minúscula la clase del polinomio $P \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ mayúscula, tenemos dos expresiones para $z^2 = z.z = xy$ para un mismo elemento del anillo $\mathbb{C}[S]$.

Volviendo al dominio de factorización única de los enteros Z, de la expresión (3.1) se deduce

$$(a) = (p_1)^{r_1} \cap \ldots (p_k)^{r_k}. \tag{3.2}$$

En los cocientes $\frac{\mathbb{Z}}{(p_j)^{r_j}}$ de $\mathbb{Z}$ por los ideales $(p_j)^{r_j}$ todos los divisores de cero son nilpotentes. Los ideales que satisfacen esta propiedad su cociente son llamados primarios.

Veremos en esta sección que hay una amplia clases de anillos, incluido los dominios de factorización única, en las cuales todo ideal admite una descomposición de ideales primarios como (3.2).

Definición 2. Un ideal q de un anillo A es llamado **primario** si para cualquier dos elementos $a, b \in A$ tal que $a.b \in q$ y $a \notin q$ se tiene $b^n \in q$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

Que un ideal q sea primario equivale a decir que en $\frac{A}{q}$ todo divisor de cero sea nilpotente.

Observación 1. El radical de un ideal primario es un ideal primo. En efecto, sea q primario y $p = \sqrt{q}$ el radical del ideal q. Si $a, b \in A$ tal que $ab \in p$ y $a \notin p$ entonces $a^n b^n \in q$ para algún n. Como $a^n \notin q$ se tiene que algunas potencias de b^n están en q luego $n\sqrt{q} = p$.

Definición 3. Un ideal de ideal primario q, tal que su radical es el ideal primo $p = \sqrt{q}$, es llamado ideal p-**primario**. Si fuera este el caso, se suele decir que p es el ideal primo asociado a q.

Proposición 2. Si $\mathfrak{m}$ es un ideal maximal de un anillo A. Los ideales $\mathfrak{m}$-primarios de A son los ideales del radical $\mathfrak{m}$.

Prueba: Sea I un ideal del anillo A tal que $\sqrt{I} = \mathfrak{m}$. Luego para todo ideal primo p tal que $I \subset p$ se tiene que $\mathfrak{m} = \sqrt{I} \subset \sqrt{p}$ por la maximalidad de $\mathfrak{m}$ y por ser p primo tenemos $\mathfrak{n} = \sqrt{p} = p$. Luego, de la correspondencia biunivoca entre los ideales que forman del espectro Spec(A) [2] de A que contienen el ideal I y el espectro de Spec$(\frac{A}{I})$

$$\begin{array}{rcl} \{J \in \mathrm{Spec}(A) :\ I \subset J\} & \to & \mathrm{Spec}(\frac{A}{I}) \\ J & \mapsto & \frac{J}{I} \end{array}$$

Por lo tanto Spec$(\frac{A}{I}) = \{\frac{\mathfrak{m}}{I}\}$. Luego todo elemento de $\overline{a} \in \frac{A}{I}$ o es invertible o no lo es, si no lo fuera tenemos que $\overline{a} \in \frac{\mathfrak{m}}{I} = \frac{\sqrt{I}}{I}$ luego existe un entero positivo n tal que $a^n \in I$. En resumen, hemos probado que todo elemento de $\frac{A}{I}$ o es invertible o es nilpotente, por lo tanto el ideal I es $\mathfrak{m}$-primario. $\square$

Observación 2. De la proposición se deduce que todo potencia $\mathfrak{m}^n$ del ideal maximal $\mathfrak{m}$ es $\mathfrak{m}$-primario.

Para una interpretación geométrica de los ideales primarios usaremos que todo ideal de un anillo noetheriano contiene una potencia de su ideal radical. Para probar esta afirmación considere un ideal I en un anillo noetheriano, luego $\sqrt{I} = (b_1, \ldots, b_r)$ por lo que existira un número natural n_j tal que $b^{n_j} \in I$ para todo j. Sean $n = n_1 + \ldots + n_r$ y sea $x_1 \ldots . x_r \in (\sqrt{I})^n$, donde $x_i \in \sqrt{I}$ y como tal cada uno de ellos se representará como $x_i = x_{i1}b_1 + \cdots + x_{ir}b_r$. El producto

$$x_1 \ldots . x_r = (x_{11}b_1 + \cdots + x_{1r}b_r) \ldots . (x_{r1}b_1 + \cdots + x_{rr}b_r)$$

tiene $nr = rn_1 + \ldots + rn_r$ términos, así cada término tiene a $b_i^{n_i} \in I$ como factor, es decir $x_1 \ldots x_n \in I$. Por lo tanto hemos probado $(\sqrt{I})^n \subset I$.

Observación 3 (Interpretación geométrica de los ideales primarios)**.** Considere el anillo $A = \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ y $\mathfrak{m}$ un ideal maximal del anillo A, por el Teorema de los ceros de Hilbert $\mathfrak{m} = (X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)$

[2]El espectro de un anillo A es el conjunto de los ideales primos de este anillo Spec$(A) = \{J \subset A :\ J \text{ es ideal primo de } A\}$

corresponde a un punto $a = (a_1, \ldots, a_n)$ del espacio complejo $\mathbb{C}^n$. Por tanto

$$\frac{A}{\mathfrak{m}^r} = \mathbb{C}[X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n]_{<r}{}^3.$$

Luego, si consideramos un ideal $\mathfrak{m}$-primario q, es decir $\sqrt{q} = \mathfrak{m}$ luego de la observación anterior existe un r tal que $\mathfrak{m}^r = (\sqrt{q})^r \subset q$ y por la correspondencia biunivoca

$$\begin{array}{rcl} \{J \text{ ideal de } A : \ \mathfrak{m}^r \subset J)\} & \rightarrow & \{J' : \ J' \text{ ideal de } \frac{A}{\mathfrak{m}^r}\} \\ J & \mapsto & \frac{J}{I} = \pi(J) \end{array}$$

donde $\pi : A \rightarrow \frac{A}{\mathfrak{m}^r}$ es el homomorfismo canónico. Al ideal $\mathfrak{m}$-primario q le corresponde el ideal $\pi(q)$ ideal del cociente $\frac{A}{\mathfrak{m}^r}$, así $\pi(q)$ es un subespacio de dimensión finita de $\mathbb{C}[X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n]_{<r}$. La base estandar de este espacio es $B = \{(X - a)^\alpha : |\alpha| < r\}$, donde $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $(X-a)^\alpha = (X_1-a_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (X_n-a_n)^{\alpha_n}$ y $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. La base dual de este espacio esta formada por las formas lineales $B^* = \{T_\beta : |\beta| < r\}$, donde los T_β estan definidas por la relación $T_\beta((X-a)_\alpha) = \delta_{\alpha,\beta}$, esto es

$$T_\beta = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial X^\beta} = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial X_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot \partial X_n^{\beta_n}}$$

Como $\pi(q) = \{\overline{f} = \pi(f) : f \in q\}$ es un subespacio vectorial del espacio $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]_{<r}$, este subespacio esta definido por un sistema $\mathbb{C}$-lineal

$$\sum_{|\beta|<r} c_{i,\alpha} T_\beta(\overline{f}) = 0, \ 1 \leq i \leq s$$

Si $\overline{f}(X) = \sum_{|\beta|} b_\beta X^\beta = \sum_{|\beta|} b_\beta((X-a)+a)^\beta$. Luego,

$$T_\beta(\overline{f}) = \frac{\partial^{|\beta|}(f)}{\partial X_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot \partial X_n^{\beta_n}}(a_1, \ldots, a_n)$$

[3] $\mathbb{C}[X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n]_{<r}$ es el espacio de los polinomios de grado menor que r en las variables $X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n$

Finalmente, tenemos q esta dado por las relaciones

$$\sum_{|\beta|<r} c_{i,\alpha} \frac{\partial^{|\beta|}(f)}{\partial X_1^{\beta_1} \ldots . \partial X_n^{\beta_n}}(a_1, \ldots, a_n) = 0,\ 1 \leq i \leq s$$

Esto es, para que un polinomio este en un ideal $\mathfrak{m}$-primario no basta que el polinomio se anule en el punto a sino el tiene que anularse hasta cierto orden en las direcciones determinadas por el ideal primario. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 1. Considere el ideal maximal $\mathfrak{m} = (X, Y)$ de $\mathbb{C}[X, Y]$ asociado al origen del plano complejo. El ideal $q = (X^2, Y)$ evidentemente es un ideal $\mathfrak{m}$-primario. Veamos que los ideales primarios esconden más información de sus elementos que solo anularse en el origen. Considere un polinomio $f \in q$

$$f(X, Y) = c_{00} + c_{10}X + c_{01}Y + c_{20}X^2 + c_{11}XY + c_{02}XY^2 + \cdots .$$

Observe que f modulo el ideal q esta deteminado solo por $c_{00} = f(0, 0)$ y $c_{10} = \frac{\partial f}{\partial X}(0)$. Esto significa que q revela el valor de f en el origen y la primera derivada en la dirección en la del eje X.

Otro ideal que es $\mathfrak{m}$-primario es el ideal $q = (X^2, XY, Y^2)$, si procedemos análogamente al caso anterior, este dará el valor de los polinomios de f en el origen y la derivada de f en cualquier dirección.

Lema 1. Sea I un ideal del anillo A y $a \in A$ tal que $(I : a) = (I : a^2)$. Entonces $(I : a) \cap (I, a) = I$.

Prueba: Evidentemente $I \subset (I : a) \cap (I, a)$. Recíprocamente, dado $b \in (I : a) \cap (I, a)$ entonces

$$b = x + ya, \text{ donde } x \in I, y \in A$$

Por otro lado como $b \in (I : a)$ se tiene

$$I \ni ab = xa + ya^2$$

Por lo tanto, $ya^2 \in I$ y así $y \in (I : a^2) = (I : a)$. Por consiguiente $ya \in I$. Finalmente $b \in I$. $\square$

Ahora estamos en condiciones de probar el Teorema de la descomposición primaria, probado por Lasker [4] para el anillo de los polinomios y luego generalizado por Noether [5] para anillos noetherianos.[4]

Teorema 1 (Descomposición Primaria)**.** Sea A un anillo noetheriano, $I \subsetneq A$ es un ideal. Entonces existe un número finito de ideales primarios $q_1, \ldots, q_r \in A$

$$I = q_1 \cap \ldots \cap q_r.$$

Prueba: Suponga lo contrario. Entonces la familia $\mathfrak{A}$ de ideales que no son intersección de un número finito de ideales primarios. Supongamos que esta familia no es vacía. Como el anillo A es noetheriano $\mathfrak{A}$ tiene un elemento maximal respecto a la inclusión. Sea I un ideal maximal de esta familia. En particular I no es primario. Por consiguiente, existen a y $b \in A$ tales que $ab \in I$, $a \notin I$ y $b^n \notin I$ para todo n. Luego tenemos una cadena de ideales

$$(I : b) \subset (I : b^2) \subset \ldots$$

Dado que A es noetheriano, existe n tales que

$$(I : b^n) = (I : b^{n+1}) = \ldots = (I : b^{2n})$$

Luego del Lema 1 se tiene $I = (I : b^n) \cap (I, b^n)$. Puesto que $b^n \notin I$, tenemos $I \subsetneq (I, b^n)$. Mas aun como $a \notin I$ y $ab^n \in I$ tenemos $I \subsetneq (I : b^n)$. Como I es maximal en $\mathfrak{A}$ tenemos que ambos $(I : b^n)$, $(I, b^n) \notin \mathfrak{A}$. Por consiguiente ambos son intersección finita de ideales primarios. Pero como $I = (I : b^n) \cap (I, b^n)$ se sigue que I es intersección de un número finito de ideales primarios lo cual es un absurdo. $\square$

[4]Una anillo es noetheriano si toda cadena creciente de ideales es finita

4. Campos Logarítmicos

De la Prosición 1 podemos asumir $J(F) \neq \mathbb{C}[X, Y]$. Por el Teorema de la Descomposición Primaria de Lasker-Noether

$$J(F) = q_1 \cap \ldots \cap q_s$$

donde q_i son los ideales primarios y asociados a ideales primos p_i, $1 \leq i \leq s$, $\sqrt{q_i} = p_i$. En particular

$$J(F) \subset p_i, \text{ para todo } i = 1, \ldots, s \tag{4.1}$$

También tenemos

$$(J(F) : (F)) = (q_1 : (F)) \cap \ldots \cap (q_s : (F))$$

Es bien conocido que todo ideal p_i primo en $\mathbb{C}[X, Y]$ es generado por un polinomio irreducible π, o es maximal y determinado por un punto a del plano complejo $\mathbb{C}^2$.

Lema 2. Si $p_i = (\pi)$ para algún polinomio π, entonces $(q_i : (F)) = q_i$

Prueba: La hipótesis implica que $q_i = (\pi^s)$ para algún $s \geq 1$. Asuma que

$$\psi \in (q_i : (F)) - q_i$$

Por lo tanto, π^s no divide ψ mientras que $\pi^s | \psi F$ luego $\pi | F$. Por otro lado de (4.1) se desprende que $\pi | \frac{\partial F}{\partial X}$, $\pi | \frac{\partial F}{\partial F}$. Esto es imposible puesto que π es un factor irreducible de F. $\square$

Lema 3. Suponga que p_i corresponde a un punto $a \in C$. Entonces

a) $\dfrac{(q_i : (F))}{q_i}$ es un espacio vectorial complejo de dimensión finita.

b) $(q_i : (F)) \neq q_i$ si, y solo si, $a \in \operatorname{Sing} C$, donde $C : \; F = 0$.

Prueba:

a) Como los ceros del ideal p_i^k, para todo k, es siempre el punto a entonces el espacio vectorial $\frac{\mathbb{C}[X,Y]}{p_i^k}$ es de dimensión finita para todo k. Como estamos trabajando con anillos noetheriano de $\sqrt{q_i} = p_i$ existe un número entero positivo k tal que $p_i^k \subset q_i$. Luego de $(q_i : (f)) \subset \mathbb{C}[X, Y]$ se tiene

$$\frac{(q_i : (f))}{q_i} \subset \frac{(q_i : (f))}{p_i^k} \subset \frac{\mathbb{C}[X, Y]}{p_i^k}$$

b) Asuma que $\psi \in (q_i : (F)) - q_i$ entonces $\psi F \in q_i$ y $\psi \notin q_i$, como q_i es primario se tiene que $F^m \in q_i$, para algún m. Así $F^m \in p_i$ y $F(a) = 0$. De (4.1) se tiene que

$$\frac{\partial F}{\partial X}(a) = \frac{\partial F}{\partial Y}(a) = 0^5$$

Por lo tanto $a \in \operatorname{Sing} C$.
Recíprocamente, supongamos $a \in \operatorname{Sing} C$, en particular $F(a) = 0$, luego $F \in p_i$ así existe $m \geq 1$ tal que $F^m \in q_i$ y sea m el más pequeño con esta propiedad, así $\psi = Fm - 1 \in (q_i : (f)) - q_i$.

□

Proposición 3. a) La dimensión d del espacio $\mathbb{C}$-vectorial

$$\frac{(J(F) : (F))}{J(F)}$$

es finito.

b) La curva $C : F = 0$ es regular si, y solo si, $d = 0$. En este caso, $V(F) = RF$ si y solo si $V = \rho V_1 + FV'$, donde V' es un campo arbitrario y V_1 es el campo definido en la proposición 1.

[5] $\operatorname{Sing}(C) = \left(\frac{\partial F}{\partial X} = 0\right) \cap \left(\frac{\partial F}{\partial Y} = 0\right) \cap (F = 0)$

c) En el caso $d \geq 1$, sea $S_1 \dots S_d \in \mathbb{C}[X, Y]$ tal que

$$S_1 + J(F), \dots, S_d + J(F)$$

forman una base del espacio vectorial dada en a) . Si V'_j son campos vectoriales polinomiales tal que $V'_j(F) = S_j F$, $1 \leq j \leq d$. Entonces $V(F) = RF$ para algún polinomio R si, y solo si,

$$V = SV_1 + \sum \alpha_j V'_j + F\,V'$$

donde V' es un campo verctorial y V_1 es como en la proposición 1

Prueba: a) Apliquemos el Teorema de la Descomposición Primaria al ideal jacobiano $J(F)$

$$J(F) = q_1 \cap \dots \cap q_s$$

Consideremos el homomorfismo

$$(J(F)\colon (F)) = (q_1\colon (F)) \cap \dots \cap (q_s\colon (F)) \to \frac{(q_1\colon (F))}{q_1} \oplus \dots \oplus \frac{(q_s\colon (F))}{q_s}$$
$$\psi \mapsto (\psi + q_1, \dots, \psi + q_s)$$

el kernel de este homomorfismo es igual $q_1 \cap \dots \cap q_s$ y así

$$\frac{(J(F) : (F))}{J(F)} \simeq \bigoplus_j \frac{(q_j : (F))}{q_j}$$

b) De los lemas anteriores F es regular equivale a $(q_i : (F)) = q_i$, para todo i y así $d = 0$. En este caso $(J(F) : (F)) = J(F)$. Luego, $V(F) = RF$ equivale a $R \in J(F)$, así $R = \dfrac{\partial F}{\partial X}P + \dfrac{\partial F}{\partial Y}Q = V'(F)$, donde $V' = P\dfrac{\partial}{\partial X} + Q\dfrac{\partial}{\partial Y}$. Hasta aquí tenemos

$$(V - FV')(F) = 0$$

De la proposición 1 se tiene $V - FV' = SV_1$ para algún polinomio S.
c) Como $V(F) = RF$ tenemos que $R \in (J(F) : F)$ Luego existen $\alpha_j \in \mathbb{C}$ tal que

$$R + J(F) = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i (S_i + J(F)) = \left(\sum_{i=1}^{d} \alpha_i S_i\right) + J(F)$$

Entonces existe un campo V' tal que $R - \sum_{i=1}^{d} \alpha_i.S_i = V'(F) \in J(F)$. Luego, multiplicando por F de las hipótesis tenemos

$$(V - \sum_{i=1}^{d} \alpha_i V_i' - FV')(F) = 0.$$

Por lo tanto de la proposición 1 se desprende la expresión

$$V = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i V_i + FV' + SV_1$$

donde S es un polinomio. □

Teorema 2. Sea $C : F = 0$ una curva algebraica dada por su ecuación reducida. Entonces

$$\mathrm{Der}(\log C) = \mathbb{C}[X,Y]V_1 + \sum_{i=1}^{d} \mathbb{C}.V_i' + F.\mathrm{Der}_{\mathbb{C}[\mathrm{X},\mathrm{Y}]}.$$

Prueba: Del item c) de la proposición 3 se tiene que el $\mathbb{C}[X,Y]$-módulo $\mathrm{Der}(\log C)$ esta contenida en la suma espacios del enunciado del teorema. Por otro lado, si a cualquier campo perteneciente a esta suma de espacios le aplicamos a F obtendremos como resultado un multiplo de F, es decir la suma de espacios esta contenida en $\mathrm{Der}(\log C)$. □

Referencias

[1] Deligne, P. (1970). *Equations differentielles à points singuliers réguliers.* LNM 163, Springer Verlag

[2] Eisenbud, D. (1995). *Commutative Algebra: with a View Toward Algebraic Geometry.* Springer.

[3] Gauss, C. (1801). *Untersuchungen uber die höhere Arithmetik.* Leipzig

[4] Lasker,E. (1905). *Zur Theorie der Moduln und Ideale.* Math. Ann. 60, 20-116

[5] Noether, E. (1921). *Idealtheorie in Ringbereichen.* Math. Annalen 83, 24-66.

[6] Paul, E. (2004). *Formal normal forms for the perturbations of a quasi-homogeneous hamiltonian vector fields.* Jounal of Dynamical and Control Systems. Vol. 10 (4) 545-575.

[7] Saito, K. (1980). *Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields.* J. Fac. Sci. Tokyo 27 (1980) (2) 265-291.

[8] Sancho, P. (2001). *Algebra Conmutativa.*

http://matematicas.unex.es/ sancho/AlgebraConmutativa/alco0.pdf

[9] Walcher, S. (2000). *Plane polynomial vector fields with prescribed invariant curves.* Proccedings of the Royal Society of Edinburgh 130A, 633-649.

Abstract

We describe the space of polynomial fields tangent to a given an algebraic curve.

Keywords: Invariant algebraic curves, Primary Decomposition, logarithmic vector fields

Percy Fernández Sánchez
Sección Matemática,
Departamento de Ciencias
Pontificia Universidad Católica del Perú
pefernan@pucp.edu.pe