PROBLEMA DE CAUCHY PARA UN SISTEMA DE TIPO BENJAMIN-BONA-MAHONY

Juan Montealegre Scott[1]

Noviembre, 2012

Resumen

Dado el problema de valor inicial para un sistema de dos ecuaciones de Benjamin-Bona-Mahony (BBM) acopladas a través de los términos dispersivos y no lineales, se demuestra que está bien colocado localmente y globalmente en los espacios $H^s \times H^s$ con $s \geq 0$.

MSC(2000): 35Q53, 37K05.

Palabras clave: *Ecuaciones dispersivas no lineales, buena formulación local y global, método de Bourgain de los estimados no lineales, método de Bourgain de alta y baja frecuencia.*

1. *Sección Matemáticas, Departamento de Ciencias, PUCP.*

1. Introducción

Consideremos el problema de valor inicial para el sistema acoplado de ecuaciones de Benjamin-Bona-Mahony (BBM)

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 \partial_t u - a\partial_x^2 \partial_t v + b\partial_x u + u\partial_x u + \alpha v \partial_x v + \beta \partial_x (uv) = 0 \\ \partial_t v - \partial_x^2 \partial_t v - a\partial_x^2 \partial_t u + b\partial_x v + \alpha u \partial_x u + v \partial_x v + \beta \partial_x (uv) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

en donde $u = u(x,t)$ y $v = (x,t)$ son funciones reales de las variables $x \in \mathbb{R}$ y $t \in [0, +\infty[$. En el sistema (1) a y b son constantes reales en el intervalo $[0, 1[$ a la vez que α y β son números reales positivos.

El sistema (1) aparece como una alternativa al sistema presentado por Gear y Grimshaw

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + a\partial_x^3 v + b\partial_x u + u\partial_x u + \alpha v \partial_x v + \beta \partial_x (uv) = 0 \\ \partial_t v + \partial_x^3 v + a\partial_x^3 u + b\partial_x v + \alpha u \partial_x u + v \partial_x v + \beta \partial_x (uv) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

el cual tiene la estructura de un par de ecuaciones del tipo Korteweg-de Vries acoplado a través de los efectos dispersivos y no lineales, y modela la interacción entre dos ondas solitarias que se propagan en una dirección a lo largo de interfases separadas verticalmente en un fluido estratificado y cuyas velocidades de fase difieren en una cantidad relativamente pequeña.

La buena formulación del problema de valor inicial asociado con el sistema (2) con condiciones iniciales

$$u(x,0) = \phi_1(x) \qquad \text{y} \qquad v(x,0) = \phi_2(x) \tag{3}$$

ha sido estudiado por diferentes métodos. Así, Bona, Ponce, Saut y Tom [6] usaron la teoría cuasi lineal de Kato [11] y la teoría desarrollada por Kenig, Ponce y Vega [12] para demostrar que el problema $(2) - (3)$ es globalmente bien formulado en $H^s \times H^s$ para cualquier $s \geq 1$ siempre que $|a| < 1$. Después Linares y Panthee [15] estudiaron este problema en los espacios $X_{s,b}$ utilizados por Bourgain para tratar con las ecuaciones dispersivas no lineales y usando el estimado bilineal establecido por Kenig, Ponce y Vega [13] probaron la buena formulación local en $H^s \times H^s$, $s > -3/4$. También usando la idea de Bourgain probaron que el resultado local es óptimo demostrando que la aplicación flujo no es C^2 en el origen para datos iniciales en $H^s \times H^s$, $s < -3/4$. Además, derivaron una *cantidad casi conservada* y la usaron para implementar el *método-I* de Colliander, Keel, Staffilani, Takaoka y Tao [10] para demostrar que la solución local se puede extender a una solución global para datos iniciales en $H^s \times H^s$ para todo $s > -3/10$.

En este trabajo estudiamos la buena formulación global del problema de valor inicial asociado con el sistema (1) con condiciones iniciales (3). Demostraremos los siguientes teoremas.

Teorema 1. *Para cualquier $\vec{\phi} \in H^s \times H^s$, $s \geq 0$, existe un $T = T\left(\left\|\vec{\phi}\right\|_{H^s \times H^s}\right) > 0$ y una solución única $\vec{u} \in C\left([-T,T] : H^s \times H^s\right)$ del problema de valor inicial $(1) - (3)$. Además, para $R > 0$, sean B_R la bola de radio R centrada en el origen de $H^s \times H^s$ y $T = T\left(R\right) > 0$ un tiempo de existencia uniforme para el problema de valor inicial $(1) - (3)$ con $\vec{\phi} \in B_R$. Entonces la correspondencia $\vec{\phi} \mapsto \vec{u}$ que asocia a $\vec{\phi}$ la solución $\vec{u}$ del problema de valor inicial con condición inicial $\vec{\phi}$ es una aplicación real analítica de B_R hacia $C\left([-T,T] : H^s \times H^s\right)$.*

Teorema 2. *En el teorema 1, el valor de T puede tomarse arbitrariamente grande y por lo tanto el problema de valor inicial $(1) - (3)$ es globalmente bien formulado en $H^s \times H^s$ para cualquier $s \geq 0$.*

Para terminar esta breve introducción, es oportuno enunciar un resultado de mala formulación el cual muestra la fortaleza de los teoremas 1 y 2.

Teorema 3. *Para cualquier $s < 0$ y $T > 0$ la aplicación $\vec{\phi} \in H^s \times H^s \mapsto \vec{u} \in C\left([-T,T] : H^s \times H^s\right)$ establecida en el teorema 1 no es de clases C^2.*

Este resultado sugiere que no se puede esperar obtener a través de argumentos de iteración soluciones locales del problema $(1) - (3)$ para datos iniciales en $H^s \times H^s$ si $s < 0$. El teorema se obtiene siguiendo las ideas de [16] y será demostrado en un artículo posterior.

2. El Problema Lineal

En esta sección estudiamos el problema de valor inicial lineal determinado por el problema $(1)-(3)$, el cual tiene la forma vectorial

$$\begin{cases} M\partial_t \vec{u} + b\partial_x \vec{u} = \vec{0} \\ \vec{u}(x,0) = \vec{\phi}(x) \end{cases} \tag{4}$$

donde

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \vec{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad M = I - \partial_x^2 A, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Es fácil ver que para cualquier $s \geq 0$ el operador lineal $M : H^s \times H^s \to H^{s-2} \times H^{s-2}$ es biyectivo y $M^{-1} : H^{s-2} \times H^{s-2} \to H^s \times H^s$ se define por

$$M^{-1}\vec{v} = \left(M_1^{-1}v_1 + M_2^{-1}v_2, M_1^{-1}v_2 + M_2^{-1}v_1\right)$$

para todo $\vec{v} = (v_1, v_2) \in H^{s-2} \times H^{s-2}$, en donde $\widehat{M_j^{-1}v}(\xi) = m_j^{-1}(\xi)\,\widehat{v}(\xi)$ para $j = 1, 2$, con

$$m_1^{-1}(\xi) = \frac{1+\xi^2}{\left(1+\xi^2\right)^2 - a^2\xi^4} \quad \text{y} \quad m_2^{-1}(\xi) = -\frac{a\xi^2}{\left(1+\xi^2\right)^2 - a^2\xi^4}.$$

Además, los operadores lineales $\pm M^{-1}\partial_x : H^s \times H^s \to H^{s+1} \times H^{s+1}$ son disipativos maximales en $H^s \times H^s$.

De este modo se obtiene el resultado principal de esta sección.

Teorema 4. *El operador $-bM^{-1}\partial_x$ genera un semigrupo de contracciones $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ sobre $H^s \times H^s$, $s \geq 0$, que se extiende a un grupo de* *operadores unitarios sobre $H^s \times H^s$ y cualquiera sea $\vec{\phi} \in H^s \times H^s$ la función*

$$W(\cdot)\,\vec{\phi} : \mathbb{R} \to H^s \times H^s$$

es la solución única del problema de valor inicial (4). Además,

$$W(t)\,\vec{u} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (E_1(t) + E_2(t))\,u + (E_1(t) - E_2(t))\,v \\ (E_1(t) - E_2(t))\,u + (E_1(t) + E_2(t))\,v \end{pmatrix}, \tag{6}$$

para todo $\vec{u} = (u, v) \in H^s \times H^s$, en donde $E_j(t)$ son los multiplicadores de Fourier definidos por

$$\widehat{E_j(t)\,u}(\xi) = e^{it\lambda_j(\xi)}\widehat{u}(\xi) \quad \text{con } \lambda_j(\xi) = \frac{b\xi}{1 + \left(1 + (-1)^{j+1}a\right)\xi^2}. \tag{7}$$

Demostración. La primera afirmación y la segunda son consecuencias del Teorema de Hille-Yosida-Phillips [9, teorema 3.4.4] porque $\pm M^{-1}\partial_x$ son operadores disipativos maximales en $H^s \times H^s$. Finalmente, para demostrar (6), se toma la transformada de Fourier en la variable espacial a las ecuaciones y los datos iniciales del problema lineal (4), se resuelve el problema de valor inicial que resulta y se concluye por [9, teorema 3.1.1]. □

3. Estimado Bilineal

El objetivo de esta sección es probar los estimados bilineales que permitirán demostrar el teorema 1.

Proposición 5. *Sean $u, v \in H^s$, $s \geq 0$. Entonces*

$$\left\|M_1^{-1}\partial_x(uv)\right\|_{H^s} \lesssim \|u\|_{H^s}\|v\|_{H^s}. \tag{8}$$

y

$$\left\|M_2^{-1}\partial_x(uv)\right\|_{H^s} \lesssim C\,\|u\|_{H^s}\|v\|_{H^s}. \tag{9}$$

Demostración. Por un argumento de polarización, para demostrar (8) será suficiente probar que

$$\left|\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\left(1+\xi^2\right)^{s/2} m_1^{-1}(\xi)}{\left(1+\theta^2\right)^{s/2}\left(1+|\xi-\theta|^2\right)^{s/2}} \widehat{u}(\theta)\,\widehat{v}(\xi-\theta)\,\widehat{w}(\xi)\,d\xi d\theta\right| \leq C\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2}\|w\|_{L^2}. \quad (10)$$

Escribiendo $w_1(\xi) = m_1^{-1}(\xi)\,\widehat{w}(\xi)$ y definiendo $u_1(x) = \widehat{u}(-x)$, entonces la desigualdad $\frac{\left(1+\xi^2\right)^{s/2}}{\left(1+\theta^2\right)^{s/2}\left(1+|\xi-\theta|^2\right)^{s/2}} \leq 1$ válida para $s \geq 0$, un cambio de variables, la desigualdad de Cauchy-Schwartz, el teorema de Plancherel y la desigualdad de Young implican

$$\begin{aligned}\left|\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\left(1+\xi^2\right)^{s/2} m_1^{-1}(\xi)}{\left(1+\theta^2\right)^{s/2}\left(1+|\xi-\theta|^2\right)^{s/2}} \widehat{u}(\theta)\,\widehat{v}(\xi-\theta)\,\widehat{w}(\xi)\,d\xi d\theta\right| &\leq \|u_1 * w_1\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \\ &\leq \|u_1\|_{L^2}\|w_1\|_{L^1}\|v\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Pero $\|u_1\|_{L^2} = \|u\|_{L^2}$, $\|w_1\|_{L^1} \leq \left\|m_1^{-1}\right\|_{L^2}\|w\|_{L^2}$ y $\left\|m_1^{-1}\right\|_{L^2} \leq C < \infty$. Así queda demostrada la desigualdad (10). La demostración de (9) es similar. □

4. Demostración del Teorema 1

Si $\vec{u} = (u, v)$ es solución del problema $(1)-(3)$, entonces

$$\vec{u}(t) = W(t)\,\vec{\phi}(x) - \int_0^t W(t-\tau)\,M^{-1}\partial_x F(\vec{u}(\tau))\,d\tau \qquad (11)$$

en donde $\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ es el grupo de operadores unitarios sobre $H^s \times H^s$ generado por $-bM^{-1}\partial_x$.

Con las notaciones

$$G_1(\vec{u}) = M_1^{-1}\partial_x F_1(\vec{u}) + M_2^{-1}\partial_x F_2(\vec{u})$$

$$G_2(\vec{u}) = M_2^{-1}\partial_x F_1(\vec{u}) + M_1^{-1}\partial_x F_2(\vec{u}),$$

y escribiendo

$$M^{-1}\partial_x F(\vec{u}) := \vec{G}(\vec{u}) = (G_1(\vec{u}), G_2(\vec{u})),$$

$$\begin{aligned} W_1(t-\tau) G(\vec{u}) &= (E_1(t-\tau) + E_2(t-\tau)) G_1(\vec{u}) \\ &\quad + (E_1(t-\tau) - E_2(t-\tau)) G_2(\vec{u}) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} W_2(t-\tau) G(\vec{u}) &= (E_1(t-\tau) - E_2(t-\tau)) G_1(\vec{u}) \\ &\quad + (E_1(t-\tau) + E_2(t-\tau)) G_2(\vec{u}), \end{aligned}$$

la ecuación (11) equivale a las ecuaciones integrales

$$u(t) = W_1(t)\vec{\phi} - \frac{1}{2}\int_0^t W_1(t-\tau) G(u(\tau), v(\tau))\, d\tau \tag{12}$$

$$v(t) = W_2(t)\vec{\phi} - \frac{1}{2}\int_0^t W_2(t-\tau) G(u(\tau), v(\tau))\, d\tau \tag{13}$$

Existencia. Consideremos el espacio X_T de las funciones vectoriales $\vec{u} \in C([0,T] : H^s \times H^s)$ tales que

$$\sup_{0\le t\le T} \left\| \vec{u}(t) - W(t)\vec{\phi} \right\|_{H^s\times H^s} \le \left\| \vec{\phi} \right\|_{H^s\times H^s} \quad \text{y} \quad \vec{u}(0) = \vec{\phi}$$

con la norma

$$\|\vec{u}\|_{X_T} = \sup_{0\le t\le T} \|\vec{u}(t)\|_{H^s\times H^s}.$$

Para cualquier $T > 0$, X_T con la métrica d inducida por la norma $\|\cdot\|_{X_T}$ es un espacio métrico completo.

Definimos sobre X_T el operador

$$\Psi\left(\vec{u}\right)(t)=W\left(t\right)\vec{\phi}\left(x\right)-\int_0^t W\left(t-\tau\right)M^{-1}\partial_x F\left(\vec{u}\left(\tau\right)\right)\,d\tau,\ \ t\in[0,T]\,.$$

Entonces existe $T_1\in[0,T]$ tal que $\mathcal{R}\left(\Psi\right)\subset X_{T_1}$.

Veamos que existe $T_2\in[0,T_1]$ tal que $\Psi:X_{T_2}\to X_{T_2}$ es una contracción. En efecto, si $\vec{u}_1,\vec{u}_2\in X_{T_1}$ entonces

$$\begin{aligned}&\left\|\Psi\left(\vec{u}_1\right)(t)-\Psi\left(\vec{u}_2\right)(t)\right\|_{H^s\times H^s}\\&\qquad\leq\sum_{j,k=1}^{2}\int_0^t\left\|M_j^{-1}\partial_x\left(F_k\left(\vec{u}_1\right)-F_k\left(\vec{u}_2\right)\right)\right\|_{H^s}d\tau,\end{aligned}\tag{14}$$

para cualquier $t\in[0,T_1]$. Para $j,k=1,2$ la proposición 5 implica

$$\begin{aligned}&\left\|M_j^{-1}\partial_x\left(F_k\left(\vec{u}_1\right)-F_k\left(\vec{u}_2\right)\right)\right\|_{H^s}\\&\qquad\leq\frac{1+\alpha+2\beta}{2}\left(\left\|\vec{u}_1\right\|_{H^s\times H^s}+\left\|\vec{u}_2\right\|_{H^s\times H^s}\right)\left\|\vec{u}_1-\vec{u}_2\right\|_{H^s\times H^s}\end{aligned}\tag{15}$$

Por lo tanto, de las desigualdades (14) y (15) obtenemos,

$$\begin{aligned}&\left\|\Psi\left(\vec{u}_1\right)(t)-\Psi\left(\vec{u}_2\right)(t)\right\|_{H^s\times H^s}\\&\leq C\int_0^t\left(\left\|\vec{u}_1\right\|_{H^s\times H^s}+\left\|\vec{u}_2\right\|_{H^s\times H^s}\right)d\tau\sup_{\tau\in[0,T_1]}\left\|\vec{u}_1\left(\tau\right)-\vec{u}_2\left(\tau\right)\right\|_{H^s\times H^s}\\&\leq 4C\left\|\vec{\phi}\right\|_{H^s\times H^s}T_1 d\left(\vec{u}_1,\vec{u}_2\right).\end{aligned}\tag{16}$$

Como $4C\left\|\vec{\phi}\right\|_{H^s\times H^s}T_1\to 0$ cuando $T_1\to 0^+$, sigue que existe $T_2=T_2\left(\left\|\vec{\phi}\right\|_{H^s\times H^s}\right)\in\,]0,T_1]$ con $T_1<\gamma_2\left(\left\|\vec{\phi}\right\|_{H^s\times H^s}\right)=\frac{1}{4C\left\|\vec{\phi}\right\|_{H^s\times H^s}}$ tal que $0<K=4C\left\|\vec{\phi}\right\|_{H^s\times H^s}T_2<1$. Así, concluimos que

$$d\left(\Psi\left(\vec{u}_1\right),\Psi\left(\vec{u}_2\right)\right)=\sup_{0\leq t\leq T_2}\left\|\Psi\left(\vec{u}_1\right)(t)-\Psi\left(\vec{u}_2\right)(t)\right\|_{H^s\times H^s}\leq Kd\left(\vec{u}_1,\vec{u}_2\right).$$

Unicidad. Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son soluciones del problema de valor inicial (1) – (3) en la clase $C^1([0,T]:H^s \times H^s)$ con $s \geq 0$, entonces $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$ está en la misma clase y es solución del problema

$$\begin{cases} \partial_t \vec{w}(t) + bM^{-1}\partial_x \vec{w}(t) + M^{-1}\partial_x\left(F(\vec{u}(t)) - F(\vec{v}(t))\right) = \vec{0} \\ \vec{w}(0) = \vec{0}. \end{cases}$$

Así,

$$\vec{w}(t) = -\int_0^t W(t-\tau)\, M^{-1}\partial_x\left(F(\vec{u}(\tau)) - F(\vec{v}(\tau))\right) d\tau$$

y procediendo como en la deducción de (16), obtenemos

$$\|\vec{w}(t)\|_{H^s\times H^s} \leq 8(1+\alpha+\beta)\, M \int_0^t \|\vec{w}(\tau)\|_{H^s\times H^s}\, d\tau$$

donde $M = \text{máx}\left\{\|\vec{u}(t)\|_{H^s\times H^s}, \|\vec{v}(t)\|_{H^s\times H^s}\right\}$. Usando la desigualdad de Gronwall obtenemos que $\vec{u} = \vec{v}$.

Suavidad del flujo. Tenemos que

$$\Phi : \vec{\phi} \in B_R(0) \longmapsto \vec{u} \in X_T^s$$

en donde $B_R(0) = \left\{\vec{u} \in H^s \times H^s : \|\vec{u}\|_{H^s\times H^s} \leq R\right\}$. Sea

$$\Lambda : (H^s \times H^s) \times X_T^s \to X_T^s$$

definida como

$$\Lambda\left(\vec{\phi}, \vec{v}(t)\right) = \vec{v}(t) - W(t)\,\vec{\phi}(x) + \int_0^t W(t-\tau)\, M^{-1}\partial_x F(\vec{v}(\tau))\, d\tau,$$

y sean $\vec{v} = (u,v)$ y $\vec{h} = (h,k)$ en $H^s \times H^s$, entonces

$$\frac{\Lambda\left(\vec{\phi}, \vec{v}(t) + r\vec{h}\right) - \Lambda\left(\vec{\phi}, \vec{v}(t)\right)}{r}$$
$$= \vec{h} + \int_0^t W(t-\tau)\, M^{-1}\partial_x\left(G_1\left(\vec{v}(\tau), \vec{h}\right), G_2\left(\vec{v}(\tau), \vec{h}\right)\right) d\tau.$$

donde

$$G_1\left(\vec{v}(\tau),\vec{h}\right)=hu(\tau)+\frac{1}{2}rh^2+\alpha kv(\tau)+\frac{\alpha}{2}rk^2+\beta ku(\tau)+\beta hv(\tau)+\beta rhk$$

$$G_2\left(\vec{v}(\tau),\vec{h}\right)=\alpha hu(\tau)+\frac{\alpha}{2}rh^2+kv(\tau)+\frac{1}{2}rk^2+\beta ku(\tau)+\beta hv(\tau)+\beta rhk.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}&D_2\Lambda\left(\vec{\phi},\vec{v}(t)\right)\left(\vec{h}\right)\\&\qquad=\vec{h}+\int_0^t W(t-\tau)\,M^{-1}\partial_x\left(R_1(\vec{v}(\tau))\cdot\vec{h},R_2(\vec{v}(\tau))\cdot\vec{h}\right)d\tau\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}R_1(\vec{v}(\tau))\cdot\vec{h}&=hu(\tau)+\alpha kv(\tau)+\beta ku(\tau)+\beta hv(\tau)\\R_2(\vec{v}(\tau))\cdot\vec{h}&=\alpha hu(\tau)+kv(\tau)+\beta ku(\tau)+\beta hv(\tau).\end{aligned}$$

Tenemos,

$$\begin{aligned}&\left\|\int_0^t W(t-\tau)\,M^{-1}\partial_x\left(R_1(\vec{v}(\tau))\cdot\vec{h},R_2(\vec{v}(\tau))\cdot\vec{h}\right)d\tau\right\|_{H^s\times H^s}\\&\qquad\le 2T(\alpha+2\beta+1)\left\|\vec{h}\right\|_{H^s\times H^s}\sup_{\tau\in[0,T]}\|\vec{v}(\tau)\|_{H^s\times H^s}\\&\qquad\le CT\left\|\vec{h}\right\|_{H^s\times H^s}\sup_{\tau\in[0,T]}\|\vec{v}(\tau)\|_{H^s\times H^s}.\end{aligned}$$

De este modo,

$$\begin{aligned}D_2\Lambda\left(\vec{\phi},\vec{v}(t)\right)&=I+\int_0^t W(t-\tau)\,M^{-1}\partial_x\left(R_1(\vec{v}(\tau)),R_2(\vec{v}(\tau))\right)d\tau\\&=I+B\end{aligned}$$

con

$$\|B\|_{\mathcal{L}\left(X_T^s,X_T^s\right)}\le 1,$$

por lo tanto, $D_2\Lambda\left(\vec{\phi},\vec{v}(t)\right)$ es invertible y la segunda aserción del teorema sigue del Teorema de la Función Implícita. $\square$

5. Demostración del Teorema 2

En esta sección extendemos la solución local dada por el teorema 1, usando una descomposición de baja-alta frecuencia. Dado $T > 0$ cualquiera, el objetivo es probar que a cada dato inicial $\vec{\phi} \in H^s \times H^s$, $s \geq 0$, corresponde una solución única del problema $(1) - (3)$ que pertenece a la clase $C\left([-T, T] : H^s \times H^s\right)$, y que depende continuamente de $\vec{\phi}$. Por el teorema 1, este resultado es claro para datos iniciales suficientemente pequeños en $H^s \times H^s$. Por otra parte, como la unicidad y la dependencia analítica de la aplicación flujo respecto de los datos iniciales, son propiedades locales en el tiempo, el tema es probar la existencia de una solución de $(1) - (3)$ que corresponda a los datos iniciales de tamaño arbitrario.

Dado $T > 0$ fijo, descomponemos el dato inicial $\vec{\phi} = (\phi_1, \phi_2) \in H^s \times H^s$, $0 \leq s < 1$, en baja frecuencia y alta frecuencia por

$$\phi_1(x) = \left(\chi_{|\xi|\leq N}\widehat{\phi_1}(\xi)\right)^{\vee}(x) + \left(\chi_{|\xi|\geq N}\widehat{\phi_1}(\xi)\right)^{\vee}(x) = \phi_{1b}(x) + \phi_{1a}(x)$$

y

$$\phi_2(x) = \left(\chi_{|\xi|\leq N}\widehat{\phi_2}(\xi)\right)^{\vee}(x) + \left(\chi_{|\xi|\geq N}\widehat{\phi_2}(\xi)\right)^{\vee}(x) = \phi_{2b}(x) + \phi_{2a}(x),$$

en donde $N \gg 1$ es tal que

$$\sum_{j=1}^{2}\int_{|\xi|\geq N}\left(1+\xi^2\right)^s\left|\widehat{\phi_j}(\xi)\right|^s d\xi \lesssim T^{-2}.$$

Tal N existe puesto que $\left(1+\xi^2\right)^s\left|\widehat{\phi_j}(\xi)\right|^2$, $j = 1, 2$, son funciones integrables. Así fijado N, tenemos

$$\vec{\phi} = \vec{\phi}_b + \vec{\phi}_a$$

con $\vec{\phi}_b = (\phi_{1b}, \phi_{2b})$ y $\vec{\phi}_a = (\phi_{1a}, \phi_{2a})$.

Proposición 6. *Dado $T > 0$ cualquiera, para $\vec{\phi}_a = (\phi_{1a}, \phi_{2a}) \in H^s \times H^s$, $0 \leq s < 1$, la solución local $\vec{u}_a$ del problema*

$$\begin{cases} M\partial_t \vec{u}\,(t) + b\partial_x \vec{u}\,(t) + \partial_x F\,(\vec{u}\,(t)) = \vec{0} \\ \vec{u}\,(0) = \vec{\phi}_a, \end{cases} \tag{17}$$

con $\alpha = \beta$, dada por el teorema 1, se extiende a cualquier intervalo de tiempo con $\vec{u}_a \in C\,([-T, T] : H^s \times H^s)$.

Demostración. Considerando que $\alpha = \beta$, multiplicando la primera ecuación del sistema en (17) por u, la segunda ecuación por v e integrando por partes respecto de la variable espacial obtenemos

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}} \left[u^2 + v^2 + (\partial_x u)^2 + (\partial_x v)^2 + 2a\,(\partial_x u)\,(\partial_x v)\,\right] dx = 0.$$

Integrando desde 0 hasta t conseguimos

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} \left[u^2 + v^2 + (\partial_x u)^2 + (\partial_x v)^2 + 2a\,(\partial_x u)\,(\partial_x v)\right] dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left[\phi_{1a}^2 + \phi_{2a}^2 + (\partial_x \phi_{1a})^2 + (\partial_x \phi_{2a})^2 + 2a\,(\partial_x \phi_{1a})\,(\partial_x \phi_{2a})\right] dx. \end{aligned}$$

La desigualdad de Hölder y la desigualdad $2xy \leq x^2 + y^2$ válida para cualquier par de números reales x e y implican

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} \left[u^2 + v^2 + (\partial_x u)^2 + (\partial_x v)^2\right] dx \\ &\qquad \leq \frac{1+a}{1-a} \int_{\mathbb{R}} \left[\phi_{1a}^2 + \phi_{2a}^2 + (\partial_x \phi_{1a})^2 + (\partial_x \phi_{2a})^2\right] dx. \end{aligned}$$

dado que $a \in [0, 1[$. En consecuencia, existe una constante positiva C tal que

$$\|\vec{u}_a\|_{H^1 \times H^1} \leq C \left\|\vec{\phi}_a\right\|_{H^1 \times H^1}.$$

Sea $\vec{\phi}_a \in H^s \times H^s$ y

$$T_e = \sup\left\{T > 0 : \text{existe } \vec{u} : [0, T] \to H^s \times H^s \text{ solución única de } (17)\right\}$$

y supongamos que $T_e < +\infty$. Por un procedimento usual $\vec{u}$ se extiende como solución de (17) al intervalo $[0, T_e + \Delta T]$, lo que contradice la definición de T_e. Procediendo de manera similar, podemos extender la solución del problema (17) a cualquier intervalo de tiempo $[0, T]$ en un número finito de pasos. $\square$

Consideramos el problema con coeficientes variables

$$\begin{cases} M\partial_t \vec{u}\,(t) + b\partial_x \vec{u}\,(t) + \partial_x F\,(\vec{u}\,(t)) + \partial_x L\,(\vec{u}_a\,(t)\,, \vec{u}\,(t)) = \vec{0} \\ \vec{u}\,(0) = \vec{\phi}_b, \end{cases} \tag{18}$$

donde $\vec{u} = (u, v)$, $F = (F_1, F_2)$ es dado por

$$\begin{aligned} F_1\,(\vec{u}) &= \frac{1}{2}u^2 + \frac{\alpha}{2}v^2 + \alpha uv \\ F_2\,(\vec{u}) &= \frac{\alpha}{2}u^2 + \frac{1}{2}v^2 + \alpha uv. \end{aligned}$$

y $L = (L_1, L_2)$ es dado por

$$\begin{aligned} L_1\,(\vec{u}_a, \vec{u}) &= u_a u + \alpha v_a v + \alpha v_a u + \alpha u_a v \\ L_2\,(\vec{u}_a, \vec{u}) &= \alpha u_a u + v_a v + \alpha v_a u + \alpha u_a v. \end{aligned}$$

Si existe una solución $\vec{u}_a$ del problema (18) en $C\,([-T, T] : H^s \times H^s)$, entonces $\vec{u}_a + \vec{u}_b$ será solución del problema (17) en $C\,([-T, T] : H^s \times H^s)$ y el teorema 2 quedará demostrado.

Proposición 7. *Dado $T > 0$ cualquiera, si $\vec{\phi} \in H^s \times H^s$, $0 \le s < 1$, existe una solución única $\vec{u}_b \in C\,([-T, T] : H^s \times H^s)$ del problema (18).*

Demostración. La existencia y unicidad de $\vec{u}_b \in C\,([-T, T] : H^s \times H^s)$ se obtiene como en la demostración del teorema 1.

Para concluir la demostración necesitamos demostrar un estimado a priori. Multiplicando la primera ecuación del sistema en (18) por u_b, la segunda por v_b e integrando por partes, como en la demostación de la proposición 6, obtenemos

$$\partial_t \left(\|\vec{u}_b\|^2_{H^1\times H^1} + 2a \left\langle \partial_x u_b, \partial_x v_b \right\rangle_{L^2} \right) \leq C_2 \|\vec{u}_a\|_{L^2\times L^2} \|\vec{u}_b\|^2_{H^1\times H^1}$$

Integrando desde 0 hasta t, como $0 < a < 1$ obtenemos

$$\begin{aligned} &\|\vec{u}_b(t)\|^2_{H^1\times H^1} \\ &\quad \leq 2a \left| \left\langle \partial_x u_b(t), \partial_x v_b(t) \right\rangle_{L^2} \right| + C_1 \\ &\qquad\qquad + C_2 \int_0^t \|\vec{u}_a(\tau)\|_{L^2\times L^2} \|\vec{u}_b(\tau)\|^2_{H^1\times H^1} \, d\tau \\ &\quad \leq a \|\vec{u}_b(t)\|^2_{H^1\times H^1} + C_1 + C_2 \int_0^t \|\vec{u}_a(\tau)\|_{L^2\times L^2} \|\vec{u}_b(\tau)\|^2_{H^1\times H^1} \, d\tau. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|\vec{u}_b(t)\|^2_{H^1\times H^1} \leq \widetilde{C}_1 + \widetilde{C}_2 \int_0^t \|\vec{u}_a(\tau)\|_{L^2\times L^2} \|\vec{u}_b(\tau)\|^2_{H^1\times H^1} \, d\tau.$$

Por la desigualdad de Gronwall

$$\|\vec{u}_b(t)\|^2_{H^1\times H^1} \leq \widetilde{C}_1 \exp\left(\widetilde{C}_2 \int_0^t \|\vec{u}_a(\tau)\|_{L^2\times L^2} \, d\tau \right)$$

lo que concluye la demostración. $\square$

Referencias

[1] T. Benjamin, J. Bona, J. Mahony. *Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems.* Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A, 272 (1972), 47-78.

[2] V. Bisognin, G. Perla Menzala. *Decay rates of the solutions of nonlinear dispersive equations.* Proceedings of the Royal society of Edinburh 124A (1994), 1231-1246.

[3] J. L. Bona, M. Chen, J. C. Saut. *Boussinesq equations and other systems for small-amplitude long waves in nonlinear dispersive media. I. Derivation and linear theory.* J. Nonlinear Sci. 12 (2002), no. 4, 283–318.

[4] J. L. Bona, M. Chen, J. C. Saut. *Boussinesq equations and other systems for small-amplitude long waves in nonlinear dispersive media. II. The nonlinear theory.* Nonlinearity 17 (2004), no. 3, 925–952.

[5] J. L. Bona, N. Tzvetkov. *Sharp well-posedness results for the BBM equation.* Discrete and Continuous Dynamical Systems 23, 4 (2009), 1241–1252.

[6] J. L. Bona, G. Ponce, J. C. Saut and M. M. Tom. *A model system for strong interaction between internal solitary waves.* Comm. Math. Phys. Appl. Math., 143 (1992), 287-313.

[7] J. Bourgain. *Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equation.* Geom. and Funct. Anal. 3 (1993) 107-156, 209-262.

[8] H. Brézis. *Analyse fonctionelle. Théorie et applications.* Masson, Paris, (1983).

[9] T. Cazenave, A. Haraux. *An introduction to semilinear evolution equations.* Oxford University Press, New York (1998).

[10] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka and T. Tao. *Global well-posedness for KdV in Sobolev Spaces of negative index.* Electron. J. Diff. Eqns., Vol. 2001(2001), No. 26, pp. 1-7.

[11] T. Kato. *Quasi linear equations of evolution with application to partial differential equations.* Lect. Note in Math., 448, 25-70, (1975).

[12] C.E. Kenig, G. Ponce, and L. Vega. *Well-Posedness of the Initial Value Problem for the Korteweg-de Vries Equation.* J. Amer. Math. Soc., 4, 323-347 (1991).

[13] C.E. Kenig, G. Ponce and L. Vega. *A bilinear estimate with applications to the KdV equation.* J. Amer. Math. Soc. 9 (1996), 573-603.

[14] S. Lang. *Real and functional analysis.* Springer-Verlag, New York, (1993).

[15] F. Linares, M. Panthee. *On the Cauchy problem for a coupled system of KdV equations.* Communications on Pure and Applied Mathematics, v. 3, n.3, p. 417-431, (2004).

[16] L. Molinet, J. C. Saut, N. Tzvetkov. *Well-posedness and ill-posedness results for the Kadomtsev-Petviashvili-I equation.* Duke Math. J. 115 (2002), no. 2, 353–84.

Abstract

It is proved that the initial value problem for a system of two Benjamin-Bona-Mahony equations coupled through both dispersive and nonlinear terms is locally and globally well posed in the Soboloev spaces $H^s \times H^s$ with $s \geq 0$.

Keywords: Nonlinear dispersive equations, local and global well posedness, Bourgain's method of nonlinear estimates and Bourgain's method of high and low frequency.

Juan Montealegre Scott
Sección Matemáticas, Departamento de Ciencias
Pontificia Universidad Católica del Perú
`jmscott@pucp.edu.pe`