

— PRO —
MATHEMATICA

VOLUMEN XXXI/ No 62/2021

ISSN 2305-2430

Director

Jorge Chávez Fuentes
Departamento de Ciencias, Pontificia Universidad Católica del Perú
jrchavez@pucp.edu.pe

Consejo Directivo

Johel Beltrán Ramírez
Departamento de Ciencias, Pontificia Universidad Católica del Perú
johel.beltran@pucp.edu.pe

Rudy Rosas Bazán
Departamento de Ciencias, Pontificia Universidad Católica del Perú
rudy.rosas@pucp.pe

Luis Valdivieso Serrano
Departamento de Ciencias, Pontificia Universidad Católica del Perú
lvaldiv@pucp.edu.pe

Consejo Editorial

José Manuel Aroca Hernández-Ros
Universidad de Valladolid, España
aroca@agt.uva.es

José Arturo Kohatsu Higa
Osaka University, Japón
arturokohatsu@gmail.com

César Silva
Williams College - Massachusetts, Estados Unidos
cesar.e.silva@williams.edu

Mauricio Zevallos Herencia
IMECC, Universidade Estadual de Campinas, Brasil
amadeus@ime.unicamp.br

Oswaldo Velásquez Castañón
IMCA, Instituto de Matemática y Ciencias Afines, Perú
ovelasquez@imca.edu.pe

Abel Cadenillas
University of Alberta, Canadá
acadencil@math.ualberta.ca

Richard Gonzales Vilcarromero
Departamento de Ciencias, Pontificia Universidad Católica del Perú
rgonzalesv@pucp.edu.pe

Diseño y diagramación inicial de K. J. M. Huarcaya Huarcaya

PRO MATHEMATICA

VOLUMEN XXXI/ No 62/2021

ISSN 2305-2430

La revista PRO MATHEMATICA, fundada en 1987, es una publicación del Departamento de Ciencias, Sección Matemáticas, de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Está dedicada a artículos de investigación en las áreas de Matemáticas Puras y Aplicadas, y busca mantener un alto estándar tanto en la exposición como en el contenido matemático. Anualmente se edita un volumen compuesto por dos números. La revista publica trabajos originales de investigación o inéditos de divulgación sobre el desarrollo actual en Álgebra, Análisis Matemático, Ciencia de la Computación, Estadística y Probabilidad, Geometría, Investigación de Operaciones, Topología, Matemáticas Aplicadas y Educación Matemática. Todos los artículos son arbitrados. PRO MATHEMATICA se encuentra indexada en el catálogo Latindex y en el sistema Redalyc.

Founded in 1987, PRO MATHEMATICA journal belongs to the sciences Department, Mathematics Section, of the Pontificia Universidad Católica del Perú. It publishes research articles in the Pure and Applied Mathematics areas, and seeks to maintain a high standard for exposition as well as for mathematical content. A volume composed by two numbers is published every year. The journal publishes original papers on mathematical research or review articles on new developments in the areas of Algebra, Mathematical Analysis, Computer Science, Statistics and Probability, Geometry, Operations Research, Topology, Applied Mathematics and Mathematical Education. All papers are refereed. PRO MATHEMATICA is indexed in the Latindex catalogue and in the Redalyc system.

PRO

MATHEMATICA

VOLUMEN XXXI/ No 62/2021

ISSN 2305-2430

Juan Gutiérrez

On the intersection of two longest paths in k -connected graphs

Samir Sánchez

Dinámica de la composición polinomios de la forma $z^d + c_n$

Andrew Graven and John Hubbard

An elementary proof of Poincaré's last geometric theorem

CONTENIDO

Juan Gutiérrez <i>On the intersection of two longest paths in k-connected graphs</i>	11
Samir Sánchez <i>Dinámica de la composición polinomios de la forma $z^d + c_n$</i>	25
Andrew Graven and John Hubbard <i>An elementary proof of Poincaré's last geometric theorem</i>	61

On the intersection of two longest paths in k -connected graphs

*Juan Gutiérrez*¹

September, 2020

Abstract

We show that every pair of longest paths in a k -connected graph on n vertices intersect each other in at least $\min\{n, (8k - n + 2)/5\}$ vertices. We also show that, in a 4-connected graph, every pair of longest paths intersect each other in at least four vertices. This confirms a conjecture of Hippchen for k -connected graphs when $k \leq 4$ or $k \geq (n - 2)/3$.

MSC(2010): 05C38, 05C40.

Keywords: Longest path, k -connected graph

¹ *Departamento de Ciencia de la Computación, Universidad de Ingeniería y Tecnología (UTEC), Lima, Perú.*

1. Introduction

It is known that every pair of longest paths in a connected graph intersect each other in at least a vertex. Hippchen [5, Conjecture 2.2.4] conjectured that, for k -connected graphs, every pair of longest paths intersect each other in at least k vertices. A similar conjecture, for cycles instead of paths, was proposed by Grötschel and attributed to Scott Smith [4, Conjecture 5.2].

Smith's conjecture has been verified up to $k = 6$ [4], and for a general k , it was proved that every pair of longest cycles intersect in at least $ck^{3/5}$ vertices, for a constant $c \approx 0.2615$ [2]. However, for Hippchen's conjecture, the only nontrivial result is for $k = 3$ and was proved by Hippchen himself [5, Lemma 2.2.3]. In this paper, we verify Hippchen's conjecture for $k = 4$.

For $k \geq 5$, Hippchen's conjecture seems hard to prove. Hence, it is natural to ask for lower bounds on the intersection of two longest paths in k -connected graphs. Note that, if the graph has a Hamiltonian path, then it is clear that we have a lower bound of k . As Hamiltonian paths appear in highly connected graphs, this motivates us to study cases in which k is a fraction of n . In this paper, we show that any two longest paths intersect in at least $\min\{n, (8k - n + 2)/5\}$ vertices.

Finally, we exhibit, for any k , an infinite family of graphs that make Hippchen's conjecture tight.

2. Preliminaries

In this paper all graphs are simple (without loops or parallel edges) and the notation and terminology are standard. When we refer to paths, we mean simple paths (without repetitions of edges or vertices). The **length** of a path P is the number of edges it has, and it is denoted by $|P|$. A **longest path** in a graph is a path with maximum length among all paths. Given a path P and two vertices x and y in P , we denote by $P[x, y]$ the subpath of P with extremes x and y . Also, we denote the length

of $P[x, y]$ by $\text{dist}_P(x, y)$.

Given two set of vertices S and T in a graph G , an **S - T path** is a path with one extreme in S , the other extreme in T , and whose internal vertices are neither in S nor T . If $S = \{v\}$, we also say that an S - T path is a v - T path. When we refer to the intersection of two paths in a graph, we mean vertex-intersection, that is, the set of vertices the paths share. Two paths are **internally disjoint** if they have no internal vertices in common.

A graph G is **k -connected** if, for any two distinct vertices u and v in G , there exists a set of k u - v internally disjoint paths. It is easy to see that for a k -connected graph on n vertices, we have $k \leq n - 1$.

Our proofs rely in two well-known facts, that we state in the following propositions. The first proposition is also known as Fan lemma.

Proposition 2.1 ([1, Proposition 9.5]). *Let G be a k -connected graph. Let $v \in V(G)$ and $S \subseteq V(G) \setminus \{v\}$. If $|S| \geq k$, then there exists a set of k v - S internally disjoint paths. Moreover, every two paths in this set have $\{v\}$ as their intersection.*

The second proposition is an easy corollary of the following result of Dirac.

Theorem 2.2 ([3, Theorems 3 and 4]). *If G is a 2-connected graph on n vertices with minimum degree k , then G has a longest cycle of length at least $\min\{2k, n\}$.*

Proposition 2.3. *The length of a longest path in a k -connected graph on n vertices is at least $\min\{2k, n - 1\}$.*

Proof. If $k = 1$ then the proof is trivial, so let us assume $k \geq 2$. As G is k -connected, every vertex in G has degree at least k . Hence, by Theorem 2.2, there exists a cycle C in G with length at least $\min\{2k, n\}$. If $|C| = n$, then, by removing an edge from C , we obtain a path of length $n - 1$. If $|C| < n$, then, as G is connected, there exists an edge uv such that $u \in V(C)$ and $v \in V(G - C)$. Let w be a vertex adjacent to u

Juan Gutiérrez

in C . Then $C - uw + uv$ is a path in G of length $|C| \geq \min\{2k, n\} \geq \min\{2k, n - 1\}$. \square

3. High connectivity

In this section we show an interesting result for k -connected graphs. We begin with a simple observation.

Proposition 3.1. *Let G be a k -connected graph on n vertices. Let L be the length of a longest path in G . If P and Q are two longest paths in G , then $|V(P) \cap V(Q)| \geq 2L + 2 - n$.*

Proof. It suffices to note

$$|V(P) \cap V(Q)| = |V(P)| + |V(Q)| - |V(P) \cup V(Q)| \geq 2L + 2 - n,$$

as we want. \square

Proposition 3.1 together with Proposition 2.3 are enough to give a nontrivial result on Hippchen's conjecture.

Corollary 3.2. *Let G be a k -connected graph on n vertices. If $k \geq (n - 2)/3$, then every two longest paths intersect in at least k vertices.*

Moreover, a stronger result can be derived from these two propositions: every pair of longest paths intersect in at least $\min\{n, 4k + 2 - n\}$ vertices. The rest of this section is devoted to improve this result when $k < \frac{n-2}{3}$. The improvement relies in the following lemma. Its proof is given after Theorem 3.4.

Lemma 3.3. *Let G be a k -connected graph with $k < (n - 1)/2$. Let L be the length of a longest path in G . If P and Q are two longest paths in G , then $|V(P) \cap V(Q)| \geq 2k - L/2$.*

With that lemma at hand, it is easy to settle the main result of this section.

Theorem 3.4. *Let G be a k -connected graph on n vertices. If P and Q are two longest paths in G , then $|V(P) \cap V(Q)| \geq \min\{n, (8k - n + 2)/5\}$.*

Proof. Let L be the length of a longest path in G . If $k \geq (n - 1)/2$ then, by Proposition 2.3, we have $L \geq n - 1$. So, $|V(P) \cap V(Q)| = n \geq \min\{n, (8k - n + 2)/5\}$. Hence, we may assume $k < (n - 1)/2$.

By Proposition 3.1 and Lemma 3.3, we have

$$\begin{aligned} |V(P) \cap V(Q)| &\geq \max\{2L + 2 - n, 2k - L/2\} \\ &\geq \frac{1}{5} \cdot (2L + 2 - n) + \frac{4}{5} \cdot (2k - L/2) \\ &= (8k - n + 2)/5, \end{aligned}$$

as we want. □

We now proceed with the proof of Lemma 3.3.

Proof of Lemma 3.3. Let $X = V(P) \cap V(Q)$. Let q be an extreme of Q . Suppose for a moment that we have $q \in X$. As G is k -connected, q has at least k neighbors in Q . Let X' be the set of vertices of Q that are next to a vertex in X considering the order of the path starting at q . That is, $X' = \{x' \in V(Q) : \text{there exists a vertex } x \in X \text{ with } Q[q, x'] = Q[q, x] + xx'\}$. If every neighbor of q is in X' , then, as $L \geq \min\{n - 1, 2k\} = 2k$ by Proposition 2.3, we have $|X| \geq |X'| \geq k \geq 2k - L/2$ and we are done.

Hence, there exists a neighbor r of q in $V(Q) \setminus X'$. Let q' be the vertex adjacent to r in Q that is closer to q in Q . In that situation, the path $Q' = Q + rq - rq'$ is a longest path, with q' as one of its extremes (this interchange is known as Pósa's rotation [6]). Since $r \notin X'$, we have $q' \notin X$. Hence, as $V(Q') = V(Q)$, from now on, we may assume $q \notin X$.

By Proposition 2.1, as $|V(P)| \geq k$, there exists a set, say \mathcal{R} , of k q - $V(P)$ internally disjoint paths that end at different vertices of P . Let \mathcal{R}_A be the set of paths in \mathcal{R} that have an extreme in X . That is, $\mathcal{R}_A = \{R \in \mathcal{R} : V(R) \cap X \neq \emptyset\}$. Let $\mathcal{R}_B = \mathcal{R} \setminus \mathcal{R}_A$. Let A and B be the set of corresponding extremes of \mathcal{R}_A and \mathcal{R}_B , respectively; that is, $A = \{a \in V(P) \cap V(R) : R \in \mathcal{R}_A\}$ and $B = \{b \in V(P) \cap V(R) : R \in \mathcal{R}_B\}$.

Claim 1. *If $R \in \mathcal{R}_B$, then $|R| \geq 2$.*

Proof. Suppose by contradiction that $|R| = 1$. Let b be the extreme of R different from q . As $b \notin V(Q)$, the path $Q + qb$ is longer than Q , a contradiction. \square

Let p_1 and p_2 be the two extremes of P . Put $\mathcal{R} = \{R_1, R_2, \dots, R_k\}$, and, for $1 \leq i \leq k$, let v_i be the corresponding extreme of R_i that is in P . Moreover, we may assume that $\text{dist}_P(p_1, v_i) < \text{dist}_P(p_1, v_{i+1})$ holds for $1 \leq i \leq k - 1$.

Claim 2. *We have $\text{dist}_P(p_1, v_1) \geq |R_1|$ and $\text{dist}_P(v_k, p_2) \geq |R_k|$.*

Proof. It suffices to note that $P - P[p_1, v_1] + R_1$ and $P - P[v_k, p_2] + R_k$ are paths. \square

Claim 3. *For $1 \leq i \leq k - 1$, we have $\text{dist}_P(v_i, v_{i+1}) \geq |R_i| + |R_{i+1}|$.*

Proof. It suffices to note that $P - P[v_i, v_{i+1}] + R_i + R_{i+1}$ is a path. \square

By Claims 1, 2 and 3, we have

$$\begin{aligned}
 L &= |E(P)| \\
 &= \text{dist}_P(p_1, v_1) + \sum_{i=1}^{k-1} \text{dist}_P(v_i, v_{i+1}) + \text{dist}_P(v_k, p_2) \\
 &\geq |R_1| + \sum_{i=1}^{k-1} (|R_i| + |R_{i+1}|) + |R_k| \\
 &= 2 \sum_{i=1}^k |R_i| \\
 &= 2 \sum_{R \in \mathcal{R}_A} |R_A| + 2 \sum_{R \in \mathcal{R}_B} |R_B| \\
 &\geq 2|A| + 4|B| \\
 &= 4k - 2|A| \\
 &= 4k - 2|X|.
 \end{aligned}$$

Hence, we conclude

$$|V(P) \cap V(Q)| = |X| \geq 2k - L/2,$$

as we want. □

4. Low connectivity

In this section, we show Hippchen's conjecture for $k = 4$. We begin with a useful lemma.

Lemma 4.1. *Let P and Q be two longest paths in a graph G . Let $u \in V(P) \cap V(Q)$, $v \in V(P) \setminus V(Q)$, and $w \in V(Q) \setminus V(P)$. If $P[u, v]$ is internally disjoint from Q and $Q[u, w]$ is internally disjoint from P , then there is no vw -path internally disjoint from both P and Q .*

Proof. Suppose by contradiction that there is a vw -path R internally disjoint from P and Q . If, for instance, P has an extreme x in R , then $P + R[x, w]$ is a path longer than P , a contradiction. Hence, we may assume that R has no vertices in neither P nor Q apart from v and w . Note that $P - P[u, v] + R + Q[u, w]$ and $Q - Q[u, w] + R + P[u, v]$ are both paths, whose lengths sum $|P| + |Q| + 2|R|$, a contradiction. □

We now proceed to prove the main result of this section. An **independent set** in a graph is a set of pairwise non-adjacent vertices.

Theorem 4.2. *Every pair of longest paths in a 4-connected graph intersect in at least four vertices.*

Proof. Let G be a 4-connected graph and let P and Q be two longest paths in G . Suppose by contradiction that P and Q do not intersect in at least four vertices. As G is 3-connected, P and Q intersect in at least three vertices [5, Lemma 2.2.3]. Hence, P and Q intersect in exactly three vertices, say a, b and c . Let p_1 and p_2 be the extremes of P . Suppose, without loss of generality, that abc is a subsequence in P considering the ordering from p_1 . That is, $\text{dist}_P(p_1, a) < \text{dist}_P(p_1, b) < \text{dist}_P(p_1, c)$.

For simplicity of notation, we set $P_a = P[p_1, a]$, $P_{ab} = P[a, b]$, $P_{bc} = P[b, c]$ and $P_c = P[c, p_2]$. We also let $S = \{a, b, c\}$, $G' = G - S$, $P' = P - S$, $P'_a = P_a - S$, $P'_{ab} = P_{ab} - S$, $P'_{bc} = P_{bc} - S$ and $P'_c = P_c - S$. Without loss of generality, we have two cases, depending on the order in which a, b and c appear in Q . In each of these cases, we assume similar notation to the subpaths of Q and $Q - S$ as we did for P .

Case 1: abc is a subsequence in Q .

It is easy to see that $|P_a| = |Q_a|$, $|P_{ab}| = |Q_{ab}|$, $|P_{bc}| = |Q_{bc}|$, and $|P_c| = |Q_c|$. Hence, $P - P_a + Q_a$, $Q - Q_a + P_a$, $P - P_{ab} + Q_{ab}$, $Q - Q_{ab} + P_{ab}$, $P - P_{bc} + Q_{bc}$, $Q - Q_{bc} + P_{bc}$, $P - P_c + Q_c$ and $Q - Q_c + P_c$ are longest paths.

Let H be an auxiliary graph given by $V(H) = \{P'_a, P'_{ab}, P'_{bc}, P'_c, Q'_a, Q'_{ab}, Q'_{bc}, Q'_c\}$ and $E(H) = \{XY : \text{there is a } X\text{-}Y \text{ path in } G' \text{ with no internal vertex in } V(P) \cup V(Q)\}$. By Lemma 4.1, the sets $\{P'_a, Q'_a, P'_{ab}, Q'_{ab}\}$, $\{P'_{ab}, Q'_{ab}, P'_{bc}, Q'_{bc}\}$, and $\{P'_{bc}, Q'_{bc}, P'_c, Q'_c\}$ are independent in H . As G is 4-connected, the graph G' is connected, which implies that H is connected.

Suppose for a moment that every element of $\{P'_a, Q'_a, P'_{bc}, Q'_{bc}\}$ is empty. In that situation, a is an extreme of P . This implies that Q'_{ab} is empty; indeed, otherwise we can extend P by adding an edge aa' with $a' \in Q'_{ab}$. Analogously, P'_{ab} is also empty. Hence, as P'_c is not adjacent to Q'_c , the graph H will be either empty or disconnected, a contradiction.

Thus, the set $\{P'_a, Q'_a, P'_{bc}, Q'_{bc}\}$ has at least one nonempty element. And, analogously, the same is true for the set $\{P'_{ab}, Q'_{ab}, P'_c, Q'_c\}$. Then, in H , there is a $\{P'_a, Q'_a, P'_{bc}, Q'_{bc}\}$ - $\{P'_{ab}, Q'_{ab}, P'_c, Q'_c\}$ path. Hence, one of $\{P'_a P'_c, P'_a Q'_c, Q'_a P'_c, Q'_a Q'_c\}$ is an edge of H . Without loss of generality, we may assume $P'_a P'_c \in E(H)$.

This implies that there exists a P'_a - P'_c path with no internal vertices in $V(P) \cup V(Q)$, say R , in G' . Let $\{x\} = V(R) \cap V(P'_a)$ and $\{y\} = V(R) \cap V(P'_c)$. Let P_x and P_{xa} be the corresponding subpaths of P_a . Let P_y and P_{yc} be the corresponding subpaths of P_c . Then $P - P_{xa} - P_y + R + Q_a$ and $Q - Q_a + P_{xa} + R + P_y$ are both paths, whose lengths sum $|P| + |Q| + 2|R|$, a contradiction (see Figure 1(a)).

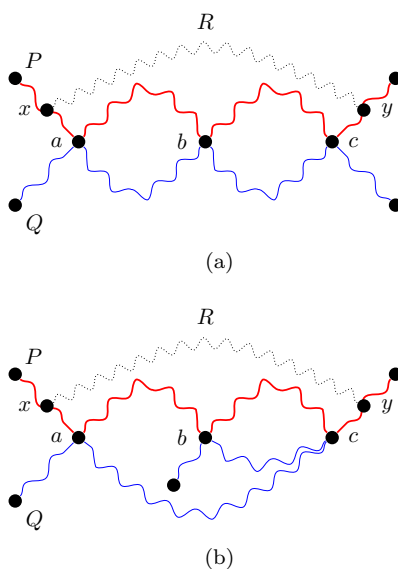


Figure 1: Cases in the proof of Theorem 4.2.

Case 2: acb is a subsequence in Q .

It is easy to see that $|P_a| = |Q_a|$ and $|P_{bc}| = |Q_{bc}|$. Hence, $P - P_a + Q_a$, $Q - Q_a + P_a$, $P - P_{bc} + Q_{bc}$, and $Q - Q_{bc} + P_{bc}$ are longest paths. Let H be an auxiliary graph given by $V(H) = \{P'_a, P'_{ab}, P'_{bc}, P'_c, Q'_a, Q'_{ac}, Q'_{cb}, Q'_b\}$ and $E(H) = \{XY : \text{there is a } X\text{-}Y \text{ path in } G' \text{ with no internal vertex in } V(P) \cup V(Q)\}$. By Lemma 4.1, the sets $\{P'_a, Q'_a, P'_{ab}, Q'_{ac}\}$, $\{P'_{ab}, Q'_b, P'_{bc}, Q'_{bc}\}$, and $\{P'_{bc}, Q'_{bc}, P'_c, Q'_{ac}\}$ are independent in H .

Suppose for a moment that every element of $\{P'_{ab}, Q'_{ac}, P'_c, Q'_b\}$ is empty. In this situation, c is an extreme of P . This implies that Q'_{bc} is empty; indeed, otherwise we can extend P by adding an edge cc' with $c' \in Q'_{bc}$. Analogously, P'_{bc} is also empty. Hence, as P'_a is not adjacent to Q'_a , the graph H will be either empty or disconnected, a contradiction.

Suppose now that every element of $\{P'_a, Q'_a, P'_{bc}, Q'_{bc}\}$ is empty. By a similar reasoning to the previous paragraph, P'_{ab} and Q'_{ac} are also empty.

If Q'_b is empty, then P'_c is also empty, which implies that H is empty, a contradiction. Otherwise, $P - P_{bc} + Q_{ac} + Q_b$ is a path longer than P , again a contradiction.

Therefore, in H , there is a $\{P'_{ab}, Q'_{ac}, P'_c, Q'_b\}$ - $\{P'_a, Q'_a, P'_{bc}, Q'_{bc}\}$ path. Without loss of generality, we may assume $P'_a P'_c \in E(H)$. This implies that there exists a P'_a - P'_c path with no internal vertices in $V(P) \cup V(Q)$, say R , in G' . Let $\{x\} = V(R) \cap V(P'_a)$ and $\{y\} = V(R) \cap V(P'_c)$. Let P_x and P_{xa} be the corresponding subpaths of P_a . Let P_y and P_{yc} be the corresponding subpaths of P_c . Then $P - P_{xa} - P_y + R + Q_a$ and $Q - Q_a + P_{xa} + R + P_y$ are both paths, whose lengths sum $|P| + |Q| + 2|R|$, a contradiction (see Figure 1(b)).

With that, we conclude the proof of Theorem 4.2. □

5. Tight families

As mentioned by Hippchen [5, Figure 2.5], the graph $K_{k,2k+2}$ (the complete bipartite graph with partitions of sizes k and $2k + 2$) makes the conjecture tight. In this section, we show that in fact, for every k , there is an infinite family of graphs that make Hippchen's conjecture tight.

Theorem 5.1. *For every k , there is an infinite family of k -connected graphs with a pair of longest paths intersecting each other in exactly k vertices.*

Proof. For any natural number n , we denote the set $\{1, \dots, n\}$ by $[n]$. Fix an arbitrary positive integer ℓ . Let $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$, and, for every $i \in [k + 1]$, let $X_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{i\ell}\}$ and $Y_i = \{b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{i\ell}\}$. We define a graph G by $V(G) = S \cup \{X_i : i \in [k + 1]\} \cup \{Y_i : i \in [k + 1]\}$, and $E(G) = \{sv : s \in S, v \in V(G) \setminus S\} \cup \{a_{ij}a_{i(j+1)} : i \in [k + 1], j \in [\ell - 1]\} \cup \{b_{ij}b_{i(j+1)} : i \in [k + 1], j \in [\ell - 1]\}$ (see Figure 2).

Note that every component of $G - S$ has size ℓ . Hence, any path in G has at most $k + \ell(k + 1)$ vertices. Then

$$a_{11} \cdots a_{1\ell} s_1 a_{21} \cdots a_{2\ell} s_2 \cdots a_{k1} \cdots a_{k\ell} s_k a_{(k+1)1} \cdots a_{(k+1)\ell}$$

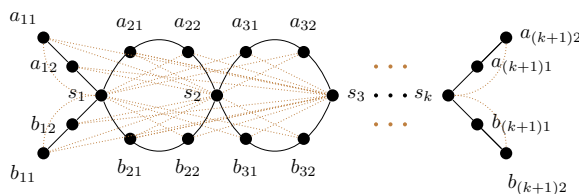


Figure 2: The graph used in the construction of Theorem 5.1 when $\ell = 2$.

and

$$b_{11} \cdots b_{1\ell} s_1 b_{21} \cdots b_{2\ell} s_2 \cdots b_{k1} \cdots b_{k\ell} s_k b_{(k+1)1} \cdots b_{(k+1)\ell}$$

are both longest paths, intersecting each other in exactly k vertices.

To finish the proof, we show that G is k -connected. Suppose by contradiction that G has a set of vertices S' of cardinality at most $k - 1$ such that $G - S'$ is disconnected. Set $A = S \setminus S'$ and $B = (V(G) \setminus S) \setminus S'$. As $|S|$ and $|V(G) \setminus S|$ are at least k , both A and B are nonempty. Note that the complete bipartite graph with partitions A and B is a spanning subgraph of $G - S'$. Thus, $G - S'$ is connected, a contradiction. \square

6. Conclusions and future work

In this paper, we show that every pair of longest paths in a k -connected graph intersect each other in at least $\min\{n, (8k - n + 2)/5\}$ vertices. A direct corollary of this result is that, if $k \geq n/3$, then every pair of longest paths intersect in at least $k + 1$ vertices and, if $k \geq n/4$, then every pair of longest paths intersect in at least $\frac{4k+2}{5}$ vertices; in general, if $k \geq n/r$, then every pair of longest paths intersect in at least $((8 - r)k + 2)/5$ vertices. Thus, for every r , we propose the following conjecture.

Conjecture CHC(r). *Let G be a k -connected graph on n vertices. If $k \geq n/r$, then every pair of longest paths intersect in at least k vertices.*

In this paper, we also showed that, in a 4-connected graph, every

Juan Gutiérrez

pair of longest paths intersect in at least 4 vertices. We believe that $\text{CHC}(r)$, for some $r > 3$, and the unconditional Hippchen conjecture for $k = 5$ can be approached with similar techniques as the ones presented here.

We also think the techniques presented here can be adapted to show similar results for cycles instead of paths; and, conversely, that the techniques used by Chen *et al.* [2] can be adapted to show similar or stronger results for paths.

Acknowledgments

We would like to thank the reviewer for valuable comments.

References

- [1] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 244, Springer, New York, 2008.
- [2] G. Chen, R. J. Faudree, and R. J. Gould, *Intersections of longest cycles in k -connected graphs*, Journal of Combinatorial Theory, Series B **72** (1998), no. 1, 143–149.
- [3] G. A. Dirac, *Some theorems on abstract graphs*, Proceedings of the London Mathematical Society **s3-2** (1952), no. 1, 69–81.
- [4] M. Grötschel, *On intersections of longest cycles*, Graph Theory and Combinatorics (1984), 171–189.
- [5] T. Hippchen, *Intersections of longest paths and cycles*, Master's thesis, Georgia State University, 2008.
- [6] L. Pósa, *Hamiltonian circuits in random graphs*, Discrete Mathematics **14** (1976), no. 4, 359–364.

Resumen: Mostramos que cada par de caminos máximos en un grafo k -conexo con n vértices se intersecan uno al otro en por lo menos $\min\{n, (8k - n + 2)/5\}$ vértices. También mostramos que en un grafo 4-conexo cada par de caminos máximos se interseca uno al otro en por lo menos cuatro vértices. Ello confirma una conjetura de Hippchen en grafos k -conexos cuando $k \leq 4$ o $k \geq (n - 2)/3$.

Palabras clave: camino máximo, grafo k -conexo

Juan Gutiérrez
Departamento de Ciencia de la Computación
Universidad de Ingeniería y Tecnología (UTEC)
Lima, Perú
jgutierrez@utec.edu.pe

Dinámica de la composición polinomios de la forma $z^d + c_n$

*Samir Sánchez*¹

Noviembre, 2020

Resumen

En este trabajo estudiamos sucesiones de polinomios que se encuentran en $\mathcal{P} = \{(f_n) : f_n(z) = z^d + c_n, \text{ con } (c_n) \text{ sucesión en } \mathbb{C}\}$. Dada una secuencia $(f_n) \in \mathcal{P}$, escribimos F_n para denotar la composición $f_n \circ \cdots \circ f_1$. Clasificamos las sucesiones de polinomios (f_n) según el comportamiento asintótico de (F_n) y caracterizamos dicha clasificación según el comportamiento de la sucesión (c_n) . Generalizamos resultados de Büger y Brück y realizamos una comparación entre la teoría clásica de iteraciones y nuestro enfoque. Buscamos cuáles resultados se preservan para cualquier tipo de secuencia (f_n) y en otros casos formulamos condiciones necesarias para que ellos se mantengan.

MSC(2010): 30D45, 37F10, 30D05.

Palabras clave: Familias normales, conjunto de Fatou, conjunto de Julia.

¹ *Departamento de Ciencias, Sección Matemáticas, Pontificia Universidad Católica del Perú.*

1. Introducción

Según la teoría clásica de iteración de polinomios, para un polinomio de grado dos siempre es posible encontrar un sistema de coordenadas donde para cierto $c \in \mathbb{C}$ el sistema se deja leer como $z \mapsto z^2 + c$. De este modo, basta conocer el comportamiento de $z^2 + c$ para entender la dinámica polinomial de grado dos. Como es de esperar, a medida que se cambia el parámetro c se obtienen diferentes conjuntos de Fatou $\mathcal{F}(c)$ y Julia $\mathcal{J}(c)$. Si a cada paso nos permitimos variar el valor de c a uno aleatorio c_n cercano, se consigue un conjunto de imágenes que representan los diferentes conjuntos de Julia asociados a cada c_n . Al tener una gran variedad de representaciones visuales de conjuntos de Julia que provienen de una distorsión del original, lo primero que uno busca es compararlos con el conjunto de Julia inicial. Es claro entonces que los conjuntos de Julia de c_n y c están relacionados. Lo siguiente es intentar compararlos vía una suerte de clasificación que nos permita ordenar las imágenes de mayor a menor parentesco con el conjunto de Julia original. Al observar el gran parecido entre todas las imágenes, no queda claro qué relación guardan los conjuntos de Julia de c_n y de c_m entre ellos, pues al tomarse de manera aleatoria no es posible afirmar a ciencia cierta cual de los dos conjuntos de Julia se asemeja más al conjunto de Julia original. En otras palabras, no es posible establecer una relación jerárquica de parecido. En vista de este vacío, decidimos cambiar el parámetro de manera monótona y aparece un detalle curioso. En algunas oportunidades no importaba cómo cambiáramos c , los respectivos conjuntos de Julia parecían seguir también el mismo patrón. No obstante, en otros casos sí importaba, pues para diferentes cambios monótonos se tenían diferentes cambios estructurales. Estos cambios sugieren una sucesión de parámetros (c_n) que a su vez esconden detrás una sucesión de polinomios $f_n(z) = z^2 + c_n$.

Hay que precisar que a pesar de la sutileza de este cambio, se tiene una gran variación en la manera de conseguir los conjuntos de Julia. Por ejemplo, al mantener fijo el parámetro c , se mantiene fijo el polinomio f y por tanto se cumple $f^{n+m}(z) = f^m(f^n(z)) = f^n(f^m(z))$. Por otro lado,

al variar el parámetro, el orden en el que se componen los polinomios es crucial. De este modo una pequeña variación en la forma de obtener los conjuntos de Julia nos lleva de estudiar iteración de polinomios a estudiar composición de objetos del tipo $f_n(z) = z^d + c_n$, donde (c_n) es una sucesión de números complejos. Como antecedente, indicamos que Matthias Büger, Rainer Brück y Stefan Reitz estudian este fenómeno en [4], [5], [2] y [3] para el caso particular $d = 2$.

Pasaremos a detallar el contenido de este trabajo. En la segunda sección se definen los conjuntos de Fatou y Julia de la composición de polinomios de la forma $z^d + c_n$. Clasificamos el comportamiento de la familia de funciones y, por último, caracterizamos esta clasificación para generalizar la prueba dada por M. Büger [4] para $d \geq 2$. En la sección 3 se pretende realizar una comparación entre la teoría clásica y la iteración aleatoria de polinomios de grado al menos 2. Observamos qué resultados importantes se preservan para cualquier tipo de polinomios. En otros casos formulamos condiciones necesarias para que se mantengan. En particular, haremos un estudio completo de la conexidad del conjunto de Julia.

Estas ideas corresponden a la tesis de maestría del autor presentada en la Pontificia Universidad Católica del Perú.

2. Clasificación dinámica

Consideremos (f_n) una sucesión de polinomios de la forma $f_n(z) = z^d + c_n$, con $c_n \in \mathbb{C}$. El objetivo de esta sección es clasificar las sucesiones (f_n) de polinomios de acuerdo con su comportamiento dinámico. Nuestro universo de estudio es entonces el conjunto

$$\mathcal{P} = \{(f_n) : f_n(z) = z^d + c_n, \text{ con } (c_n) \text{ sucesión en } \mathbb{C}\}.$$

Dada una sucesión $(f_n) \in \mathcal{P}$, escribimos F_n para referirnos a la composición $f_n \circ \dots \circ f_1$. El **conjunto de Fatou** de (f_n) es por definición el conjunto de puntos en $\widehat{\mathbb{C}}$ que admiten alguna vecindad donde (F_n) es una familia normal; será denotado por $\mathcal{F}(c_n)$. Por su parte el **conjunto**

de Julia es el complemento del conjunto de Fatou con respecto a $\widehat{\mathbb{C}}$. Nótese que casi por definición el conjunto de Fatou es abierto.

Un conjunto **invariante** debe satisfacer $f_n(M) \subset M$ para todo n . Salvo que se diga lo contrario, para evitar de paso los casos triviales $f_n(\widehat{\mathbb{C}}) = \widehat{\mathbb{C}}$ y $f_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ que no conducen a nada importante, por **dominio invariante** entenderemos un conjunto abierto e invariante dentro de $\widehat{\mathbb{C}}$ cuyo complemento tiene al menos tres puntos.

Definimos tres clases:

1. \mathcal{P}_I constituida por aquellas sucesiones para las cuales existe una vecindad conexa invariante de infinito donde F_n converge uniformemente en compactos a ∞ ;
2. \mathcal{P}_{II} conformada por todas las sucesiones para las cuales F_n converge a ∞ uniformemente en compactos de alguna vecindad de infinito, mas no existe un dominio invariante que contiene a ∞ ;
3. \mathcal{P}_{III} instituida por todas aquellas sucesiones para las cuales se tiene $\infty \in \mathcal{J}(c_n)$.

En el caso particular $(f_n) \in \mathcal{P}_I$, se define la **cuenca de atracción de infinito** como el conjunto de puntos en $\widehat{\mathbb{C}}$ que admiten una vecindad donde (F_n) converge uniformemente en compactos a ∞ . Es claro que la cuenca de atracción de infinito $\mathcal{A}_\infty(c_n)$ es parte del conjunto de Fatou, sin embargo no es necesariamente un conjunto invariante en el sentido de que se satisface $f_k(\mathcal{A}_\infty(c_n)) \subset \mathcal{A}_\infty(c_n)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. No obstante, debido a la condición $(f_n) \in \mathcal{P}_I$, por definición sí existirá una vecindad conexa invariante de infinito M donde (F_n) converge uniformemente en compactos a ∞ , por lo tanto se tendrá $M \subset \mathcal{A}_\infty(c_n)$. Notemos que si tomamos un punto en la cuenca de atracción de infinito, entonces eventualmente caerá en M . Así podemos caracterizar $\mathcal{A}_\infty(c_n)$ como el conjunto de puntos que eventualmente caen en una vecindad conexa invariante de infinito. Por su parte, el **conjunto lleno de Julia** $\mathcal{K}(c_n)$ resulta ser el complemento de la cuenca de atracción de infinito con respecto a $\widehat{\mathbb{C}}$.

Observación 2.1. Notemos que cuando (f_n) pertenece a \mathcal{P}_I o \mathcal{P}_{II} , se cumple $\infty \in \mathcal{F}(c_n)$. Puesto que $(f_n) \in \mathcal{P}_I$ implica $F_n \rightarrow \infty$ uniformemente en compactos de una vecindad M invariante por los f_n , resulta obvio que (F_n) es normal en ∞ , ya que F_n omite el complemento de M , el mismo que contiene al menos tres puntos; se sigue $\infty \in \mathcal{F}(c_n)$ del teorema de Montel. Es importante tener en cuenta que en cualquier subconjunto cerrado de M , dominio invariante de ∞ , la convergencia es uniforme hacia ∞ . Si $(f_n) \in \mathcal{P}_{II}$, entonces $F_n \rightarrow \infty$ uniformemente en compactos de alguna vecindad Q de ∞ , que no es invariante. Sin embargo, a pesar de tal hecho, la convergencia uniforme de F_n asegura que para n suficientemente grande, F_n omite un disco centrado en el origen y con ello F_n es normal en ∞ , así conseguimos también $\infty \in \mathcal{F}(c_n)$. Detalles adicionales se encuentran en las pruebas que siguen.

Es claro que una sucesión $(f_n) \in \mathcal{P}$ no puede estar contenida en dos clases diferentes, pero lo que aún no es claro es si estas clases agotan las posibilidades. Para aclarar ello necesitaremos algunos preliminares técnicos.

Lema 2.2. *Consideremos $f_n(z) = z^d + c_n$. Se tiene $(f_n) \in \mathcal{P}_I$ si y solo si (c_n) es acotada.*

Proof. Sea $C > 0$ tal que $|c_n| \leq C$ para todo n . Consideremos $M = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : |z| > C + d\}$. En primer lugar mostraremos que M es invariante. En efecto, en este caso se satisface

$$|f_n(z)| = |z^d + c_n| > |z^d| - C.$$

Si $z \in M$, tenemos $|z| > 1$, de modo que se cumple

$$|f_n(z)| > |z|^d - C > |z|^d - C|z| \geq d|z|,$$

y así M resulta un dominio invariante. Lo anterior también muestra la inclusión $\overline{f_n(M)} \subset M$, lo cual indica que en cierto M conexo e invariante ocurre una atracción topológica. Por lo anotado, tenemos $|F_n(z)| > d^n|z|$, y con ello $F_n \rightarrow \infty$ uniformemente en compactos de M , es decir se cumple $(f_n) \in \mathcal{P}_I$.

Recíprocamente, consideremos $(f_n) \in \mathcal{P}_I$ con M una vecindad invariante de infinito donde hay convergencia uniforme en compactos a ∞ . Tomemos $z_0 \in \mathbb{C} \setminus M$ y por contradicción supongamos que (c_n) no es acotada. Sea w_n cualquier valor sujeto a $w_n^d = z_0 - c_n$. Como esta sucesión no es acotada y M es vecindad de ∞ obtenemos $w_{\bar{n}} \in M$ para cierto \bar{n} . Debido a que M es invariante tendremos $z_0 = w_{\bar{n}}^d + c_{\bar{n}} = f_{\bar{n}}(w_{\bar{n}}) \in f_{\bar{n}}(M) \subset M$, lo cual no puede ocurrir. En consecuencia (c_n) debe ser acotada. \square

Como ya tenemos $\infty \in \mathcal{F}(c_n)$ si $(f_n) \in \mathcal{P}_I$ o \mathcal{P}_{II} , los siguientes resultados serán las primeras pistas para caracterizar las familias según el comportamiento de (c_n) .

Lema 2.3. *Si $\infty \in \mathcal{F}(c_n)$ entonces existe $r > 2$ y n_0 con los que se tiene $0 \notin F_n(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}_r)$ cuando $n \geq n_0$.*

Proof. Sea $r > 2$ de modo que (F_n) sea familia normal en $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}_r$. Por contradicción supongamos que existe una secuencia de índices creciente $n_1 < n_2 < \dots$ donde se tiene $0 \in F_{n_k}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}_r)$. Gracias a la normalidad de (F_n) , es claro que podemos asumir que f_{n_k} converge en $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}_r$ digamos a F . Obsérvese que se cumple $F(\infty) = \infty$. Debido a la continuidad de F , podemos incrementar r de modo que se tenga $|F(z)| > 1$ en $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}_r$. Por convergencia uniforme tendremos entonces $|F_{n_k}(z)| > 0$ con la posible excepción de un número finito de índices. Esto va en contra de la selección de los n_k . \square

Lema 2.4. *Si $\infty \in \mathcal{F}(c_n)$, entonces se cumple $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |c_n|}{d^n} < \infty$.*

Proof. Asumamos por contradicción $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |c_n|}{d^n} = +\infty$, es decir, la sucesión $\frac{\ln |c_n|}{d^n}$ es no acotada. Pongamos $a_n = \frac{\ln |c_n|}{d^n}$, lo cual equivale a escribir $|c_n| = \exp(a_n d^n)$. Obsérvese que cabe la posibilidad de tener $|c_n| = 0$ en algún momento, y es por ello que por conveniencia notacional convendremos en la igualdad $\exp(-\infty) = 0$. Debido a que (a_n) no es acotada, (c_n) tampoco lo es, y así, por el lema 2.2, tendremos $(f_n) \notin \mathcal{P}_I$.

Por definición alguna subsucesión de (F_n) converge uniformemente en compactos en alguna vecindad de ∞ , por ejemplo en $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}_r = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : |z| \geq r\}$ con $r > 2$. Por el lema anterior se puede incluso asumir que se tiene $0 \notin F_n(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}_r)$ cuando $n \geq n_0$. Definimos de manera recursiva $r_n = r_{n-1}^d + |c_n|$, donde $r_0 = r$. Debido a $r_0 > 2$ se tiene $r_n \geq r_{n-1}^d > r_{n-1}$. Ya que definimos los radios, veamos qué sucede con las imágenes de semillas elegidas en $\overline{\mathbb{D}_r}$. Tomemos $F_1(z) = f_1(z) \in F_1(\overline{\mathbb{D}_r})$, de modo que se satisfaga

$$|F_1(z)| \leq |z|^d + |c_1| \leq r^d + |c_1| = r_0^d + |c_1| = r_1,$$

$$|F_2(z)| \leq |F_1(z)|^d + |c_2| \leq r_1^d + |c_2| = r_2,$$

y por inducción logramos $|F_n(z)| \leq r_n$, para todo n . Y así obtenemos

$$\sup\{z \in \widehat{\mathbb{C}} : z \in F_n(\overline{\mathbb{D}_r})\} \leq r_n.$$

Una consecuencia de haber definido los radios de manera recursiva es que se cumple $F_n(\overline{\mathbb{D}_r}) \subseteq \overline{\mathbb{D}_{r_{n-1}^d}}(c_n)$. En efecto, al tomar $F_n(z) \in F_n(\overline{\mathbb{D}_r})$ (es decir, gracias a $|z| \leq r_{n-1}$ y $|F_n(z)| \leq r_n$) se consigue

$$|F_n(z) - c_n| = |F_{n-1}(z)^d + c_n - c_n| = |F_{n-1}(z)|^d \leq r_{n-1}^d.$$

En vista de $0 \notin F_n(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}_r)$ para $n \geq n_0$, necesariamente se tiene $0 \in F_n(\overline{\mathbb{D}_r})$ para $n \geq n_0$ pues por ser F_n un polinomio de grado d^n debe tener d^n raíces: al no estar ellas en $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}_r$ (si $n \geq n_0$) aparecerán todas en $\overline{\mathbb{D}_r}$. Por la inclusión probada en el párrafo anterior se concluye $0 \in \overline{\mathbb{D}_{r_{n-1}^d}}(c_n)$ y así se logra $|c_n| \leq r_{n-1}^d$.

Ahora escogemos $\rho_n > 0$ de manera que se tenga $r_n = \exp(\rho_n d^n)$ y reescribimos

$$1 \leq \frac{r_{n-1}^d}{|c_n|} = \frac{(\exp(\rho_{n-1} d^{n-1}))^d}{\exp(a_n d^n)} = \exp(d^n (\rho_{n-1} - a_n)).$$

Con ello conseguimos $\rho_{n-1} \geq a_n$ para todo $n \geq n_0$. De cómo está definido r_n se deduce

$$\begin{aligned} r_n = r_{n-1}^d + |c_n| &= \exp(\rho_{n-1} d^n) + \exp(a_n d^n) \\ &\leq 2 \exp(\rho_{n-1} d^n) = \exp(\ln 2 + \rho_{n-1} d^n), \end{aligned}$$

Samir Sánchez

lo cual implica $\rho_n d^n \leq \rho_{n-1} d^n + \ln 2$ para $n \geq n_0$. Después de simplificar obtenemos

$$\rho_n \leq \rho_{n-1} + \frac{\ln 2}{d^n},$$

para $n \geq n_0$. De ello se sigue

$$\begin{aligned} \rho_{n_0+2} &\leq \rho_{n_0+1} + \frac{\ln 2}{d^{n_0+2}} \\ &\leq \rho_{n_0} + \frac{\ln 2}{d^{n_0+1}} + \frac{\ln 2}{d^{n_0+2}} \\ &= \rho_{n_0} + \ln 2 \left(\frac{1}{d^{n_0+1}} + \frac{1}{d^{n_0+2}} \right), \end{aligned}$$

y por inducción $\rho_{n_0+k} \leq \rho_{n_0} + \ln 2 \left(\frac{1}{d^{n_0+1}} + \dots + \frac{1}{d^{n_0+k}} \right)$. Pero n_0 es grande, por lo que se tiene

$$\rho_n \leq \rho_{n_0} + \ln 2$$

cuando $n \geq n_0$. Concluimos que (ρ_n) es acotada, lo que hace que (a_n) también lo sea, y esto es una contradicción. \square

Finalmente el teorema de clasificación.

Teorema 2.5. Consideremos $f_n(z) = z^d + c_n$. Entonces, (f_n) pertenece a

- I. la clase \mathcal{P}_I cuando (c_n) es acotada;
- II. la clase \mathcal{P}_{II} cuando (c_n) no es acotada, pero cumple $\ln |c_n| = O(d^n)$;
- III. la clase \mathcal{P}_{III} cuando se cumple $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln |c_n|)}{d^n} = +\infty$.

En particular, \mathcal{P} es la unión disjunta de \mathcal{P}_I , \mathcal{P}_{II} y \mathcal{P}_{III} .

Proof. El ítem (I) fue probado en el lema 2.2.

Para la segunda parte consideremos (c_n) una sucesión no acotada que satisface $\ln |c_n| = O(d^n)$, es decir, existe $a > 0$ con el cual se tiene

$\ln |c_n| \leq ad^n$. Consideremos la vecindad de infinito $Q = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : |z| > d \exp(da)\}$. Probraremos primero que F_n converge a ∞ uniformemente en compactos de Q . Para ello basta mostrar que se cumple

$$|F_n(z)| > d \exp(ad^{n+1})$$

cuando $z \in Q$. En efecto, por inducción, si $n = 0$, se tiene

$$|F_0(z)| = |z| > d \exp(da).$$

Asumamos que esta propiedad es válida hasta n . A partir de ahí tenemos para $z \in Q$ las relaciones

$$\begin{aligned} |F_{n+1}(z)| &= \left| F_n(z)^d + c_{n+1} \right| \geq |F_n(z)|^d - |c_{n+1}| \\ &> |d \exp(ad^{n+1})|^d - |c_{n+1}| = d^d \exp(ad^{n+2}) - |c_{n+1}|. \end{aligned}$$

Pero se cumple $\ln |c_n| \leq ad^n$, lo cual es síntoma de $|c_n| \leq \exp(ad^n)$, y conseguimos

$$|F_{n+1}(z)| > d^d \exp(ad^{n+2}) - \exp(ad^{n+1}).$$

Pero al tenerse $\ln 2 \leq \ln d < d$, además de $ad^{n+1} \ln d < ad^{n+2}$, se consigue $\exp(ad^{n+1}) < \exp(ad^{n+2})/d$, y de este modo se cumple

$$\begin{aligned} |F_{n+1}(z)| &> d^d \exp(ad^{n+2}) - \frac{1}{d} \exp(ad^{n+2}) \\ &= \left(d^d - \frac{1}{d}\right) \exp(ad^{n+2}) > d \exp(ad^{n+2}), \end{aligned}$$

pues $d \geq 2$. En pocas palabras (F_n) converge a ∞ uniformemente en compactos de Q . Obsérvese que no puede existir una vecindad invariante de ∞ , pues de lo contrario la sucesión (c_n) sería acotada, lo cual no es el caso. La recíproca se sigue por descarte del lema 2.3.

Si $(f_n) \in \mathcal{P}$ está sujeto a $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |c_n|}{d^n} = +\infty$, nuevamente del lema 2.4, se tiene $\infty \in \mathcal{J}(c_n)$.

Por último tomemos $(f_n) \in \mathcal{P}_{III}$ y supongamos por contradicción que la sucesión $\frac{\ln|c_n|}{d^n}$ es acotada. Esto solo puede ocurrir si $(f_n) \in \mathcal{P}_I$ o \mathcal{P}_{II} . En cualquier caso se cumple $\infty \in \mathcal{F}(c_n)$, lo cual es imposible por la definición de la clase \mathcal{P}_{III} . \square

Nota 2.6. *A posteriori* el lema 2.4 en cierto sentido es inútil pues debido al teorema de clasificación se tendrá como consecuencia que ∞ está en el conjunto de Fatou si y solo si los sucesivos iterados convergen cerca de infinito a la función idénticamente igual a ∞ .

Debido al teorema anterior resulta más sencillo presentar ejemplos de sucesiones de funciones que pertenezcan a las clases $\mathcal{P}_I, \mathcal{P}_{II}$ y \mathcal{P}_{III} que hacer un análisis directo.

Ejemplo 2.7. Consideremos el caso particular $d = 3$ y $c_n = -0.1085 + 0.8i + \frac{i}{n+1}$, una sucesión acotada en norma por aproximadamente 1.8. Una vecindad invariante M de ∞ es, según lo exhibido en la prueba, el conjunto $M = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : |z| \geq 4.8\}$. (Ver figura 1.1).

Ejemplo 2.8. Consideremos el caso particular $d = 2$ y $c_n = i \exp(2^n)$, una sucesión no acotada. Como $\frac{\ln|c_n|}{2^n}$ satisface

$$\frac{\ln|i \exp(2^n)|}{2^n} = \frac{2^n}{2^n} = 1,$$

tendremos $f_n(z) = z^2 + i \exp(2^n) \in \mathcal{P}_{II}$. Una vecindad de ∞ en la que F_n converge a infinito uniformemente en compactos, según lo detallado en la prueba del teorema 2.5, es $Q = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : |z| > 2 \exp(2)\}$.

Observación 2.9. Notemos que para $n \geq 2$, la imagen de $f_n(Q)$ tiene partes fuera de Q ; así Q no es invariante. Con los coeficientes del ejemplo anterior se tiene $\ln|c_n| \leq 2^n$. Por otro lado, si “desfazamos los c_n ” (ver sección 3), por ejemplo si ponemos $\gamma_n = c_{n+N}$, se tendrá $\ln|\gamma_n| \leq 2^N 2^n$, así el valor de la cota “ a ” crece desmesuradamente.

Ejemplo 2.10. Consideremos el caso particular $d = 3$ y $c_n = \exp(n3^n)$, sucesión no acotada que satisface además

$$\frac{\ln|\exp(n3^n)|}{3^n} = \frac{n3^n}{3^n} = n.$$

Tenemos así $f_n(z) = z^3 + \exp(n3^n) \in \mathcal{P}_{III}$.

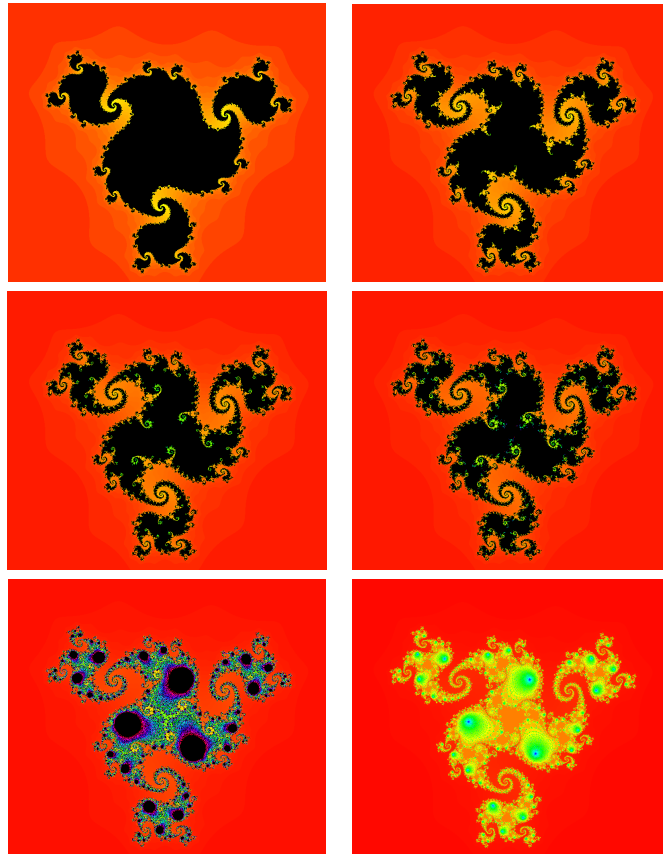


Figure 1: De izquierda a derecha y de arriba abajo se muestran los conjuntos llenos de Julia de $z^3 + c_{50}$, $z^3 + c_{1500}$, $z^3 + c_{7500}$, $z^3 + c_{10000}$, $z^3 + c_{11050}$ y $z^3 + c_{990150}$.

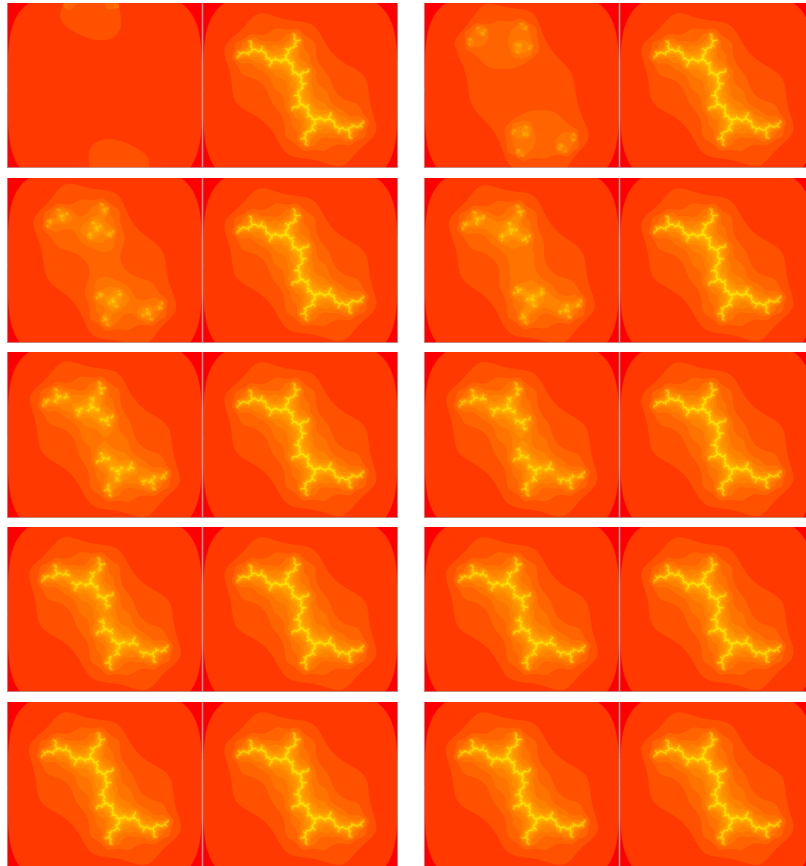


Figure 2: Comparación entre los conjuntos de Julia de los polinomios $z^2 + i$ y $z^2 + i + c_n$ con $c_n = \frac{1}{n^2} + \frac{i}{\ln^3(n)}$. De izquierda a derecha y de arriba abajo se exhiben $z^2 + c_2, z^2 + c_3, z^2 + c_4, z^2 + c_5, z^2 + c_{10}, z^2 + c_{20}, z^2 + c_{60}, z^2 + c_{250}, z^2 + c_{10^6}$ y $z^2 + c_{10^9}$.

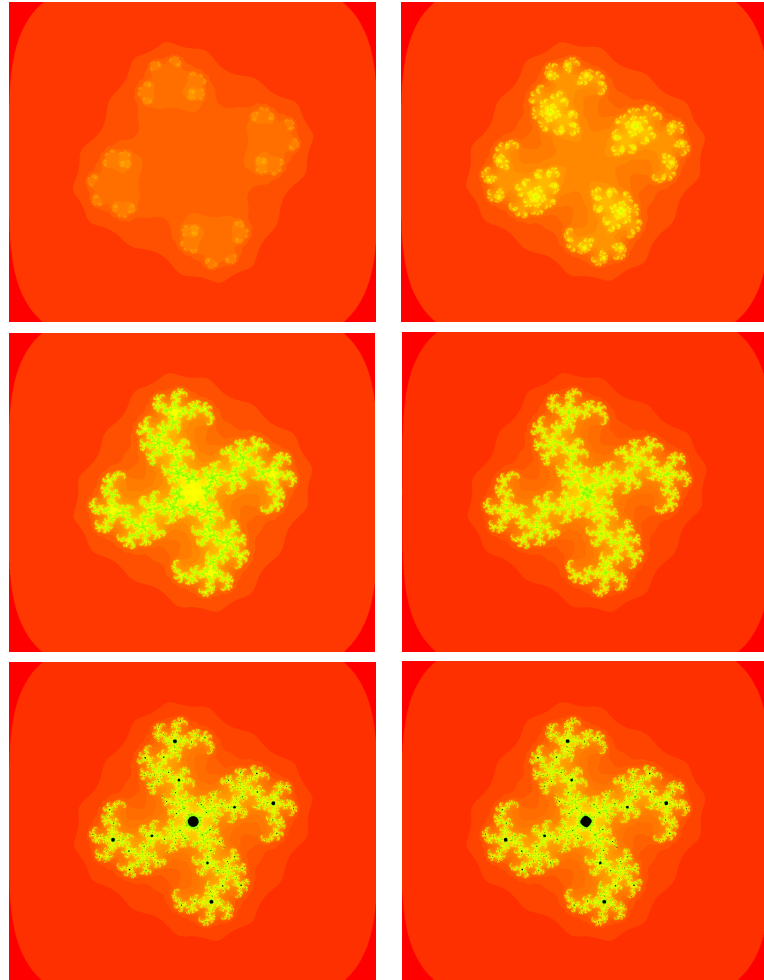


Figure 3: Conjuntos de Julia del polinomio $z^4 - 0.39596995 + 0.495975i + c_n$ con $c_n = \frac{1}{2^n} + \frac{i}{n \ln(n)}$. De izquierda a derecha y de arriba abajo se exhiben $z^4 + c_4, z^4 + c_7, z^4 + c_{10}, z^4 + c_{15}, z^4 + c_{20}$ y $z^4 + c_{107}$.

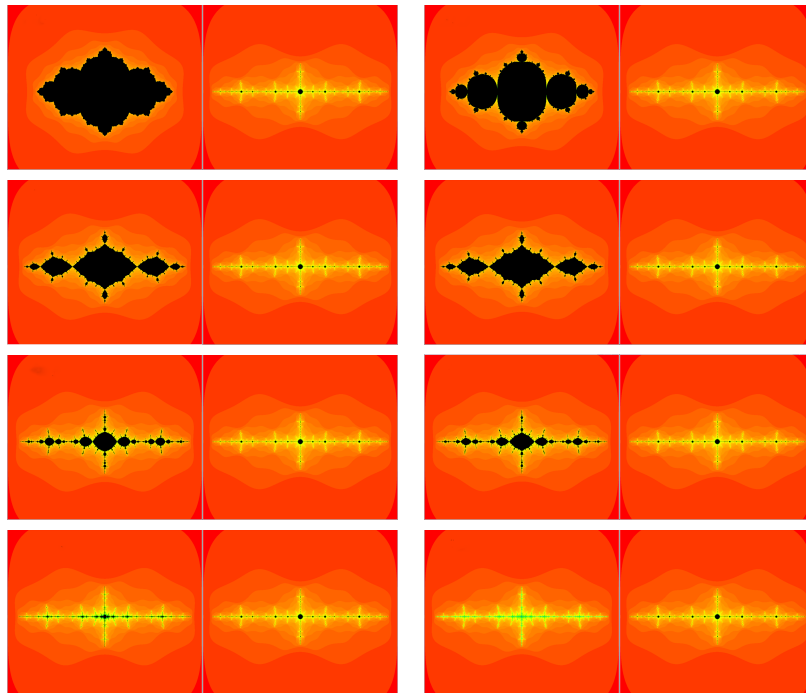


Figure 4: Comparación entre los conjuntos de Julia de los polinomios $z^2 - 1.476$ y $z^2 - 1.476 + c_n$ con $c_n = \frac{1}{\ln(n)}$. De izquierda a derecha y de arriba abajo se muestran $z^2 + c_3$, $z^2 + c_4$, $z^2 + c_{15}$, $z^2 + c_{20}$, $z^2 + c_{500}$, $z^2 + c_{1000}$, $z^2 + c_{250000}$ y $z^2 + c_{10^6}$.

3. Comparación con la teoría clásica

En vista de que lo trabajado asemeja una generalización de la teoría clásica de iteración de funciones racionales, en especial de polinomios, nos interesa sobremanera conocer qué resultados se preservan de la teoría clásica. También estudiaremos cuáles de ellos no dependen de la clasificación realizada en el primer capítulo, en particular, pretendemos formular condiciones necesarias para su generalización. Empezamos con un hecho básico.

Consideremos f_n polinomios no constantes del mismo grado $d \geq 2$, no necesariamente mónicos ni unicríticos.

Teorema 3.1. *El conjunto de Julia \mathcal{J} es no vacío.*

Proof. Si por contradicción \mathcal{J} fuera vacío, tendríamos $\mathcal{F} = \widehat{\mathbb{C}}$, y así cerca de todo $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ la familia (F_n) será normal. Por un argumento diagonal podemos extraer una subsucesión F_{n_k} que converge uniformemente a una función F , la cual, al estar definida en todo $\widehat{\mathbb{C}}$, será una función racional o idénticamente igual a ∞ .

Si F es analítica y no constante (no idénticamente igual a ∞ en este caso), entonces cada F_{n_k} fija a ∞ (pues todos son polinomios) y se tendrá $F(\infty) = \infty$. Por la continuidad de F , existe $r > 0$ lo suficientemente grande tal que $|F(z)| \geq 2$ para todo $|z| \geq r$, en particular tendremos $|F(z)| \neq 0$, y si alargamos r incluso se puede asumir $|F(z)| \neq \infty$. Esto significa que F no admite ceros ni polos adicionales sujetos a $|z| \geq r$, por lo que en caso de existir se ubican en \mathbb{D}_r . Pongamos $K_r = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : |z| \geq r\}$. Como F es continua y ∂K_r es compacto tendremos entonces

$$0 < \inf_{z \in \partial K_r} |F(z)| \leq \sup_{z \in \partial K_r} |F(z)| < \infty.$$

Como la convergencia es uniforme en compactos de $\widehat{\mathbb{C}}$, lo será en ∂K_r , y así existe k_0 tal que cuando $k \geq k_0$ se tiene para $z \in \partial K_r = \partial \mathbb{D}_r$ la relación

$$|F_{n_k}(z) - F(z)| < \inf_{w \in \partial \mathbb{D}_r} |F(w)| \leq |F(z)|,$$

Samir Sánchez

acá $\inf_{w \in \partial \mathbb{D}_r} |F(w)|$ hace las veces de epsilon para aprovechar la continuidad uniforme. Por el teorema de Rouché tendremos dentro del disco \mathbb{D}_r la igualdad

$$n^\circ \text{ceros } F_{n_k} - n^\circ \text{polos } F_{n_k} = \underbrace{n^\circ \text{ceros } F - n^\circ \text{polos } F}_{\text{constante}}.$$

Por tanto, la cantidad de ceros de F_{n_k} en \mathbb{D}_r es constante puesto que no admite polos al ser polinomio. Por otro lado la cantidad de ceros de F_{n_k} crece con k , así que el resto de esos ceros estará en $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}_r = K_r$. Tomemos una sucesión de ceros p_n que se acumula en $p \in K_r$. Como la convergencia es uniforme en compactos, conseguimos entonces

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} F_{n_k}(p_n) = F(p).$$

Es decir F arroja un cero en K_r . Sin embargo antes hemos concordado que ello es imposible.

Queda entonces descartar $F \equiv \infty$. Como F_n es polinomio es posible encontrar $p_n \in \widehat{\mathbb{C}}$ que cumple $F_n(p_n) = 0$ para cada n . La sucesión p_n posee una subsucesión convergente en $\widehat{\mathbb{C}}$. Consideramos p_{n_k} con límite $p \in \widehat{\mathbb{C}}$. En vista de que la familia (F_n) es normal en $\widehat{\mathbb{C}}$, se sigue por la convergencia uniforme en compactos la igualdad

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} F_{n_k}(p_{n_k}) = F(p),$$

lo cual no puede ocurrir pues hemos asumido $F \equiv \infty$.

Así la familia (F_n) no es normal y con ello $\mathcal{J}(c_n)$ es no vacío. \square

Ejemplo 3.2. El conjunto de Julia $\mathcal{J}(c_n)$ de $(f_n) \in \mathcal{P}$, definido como en el capítulo anterior, es no vacío.

Ahora que sabemos que el conjunto de Julia es no vacío nos interesa saber qué ocurre con su imagen bajo los sucesivos F_k . Con ese fin, comentaremos el caso general de polinomios no necesariamente mónicos ni unicríticos, incluso examinaremos el caso en que los polinomios tienen diferentes grados.

Consideremos f_n polinomios no constantes de grado d_n y escribamos $F_n = f_n \circ \cdots \circ f_1$. Se definen los conjuntos de Fatou y de Julia como se hace habitualmente. (Por conveniencia tomaremos $d_n \geq 2$, lo cual no es pérdida de generalidad.)

Ejemplo 3.3. En el caso particular en que los grados son todos iguales y además mayores que 1, los conjuntos de Fatou y de Julia han sido concertados anteriormente siempre que los polinomios sean mónicos y 0 sea su único punto crítico.

Antes de pasar al siguiente ejemplo recordemos un resultado de familias normales.

Proposición 3.4. Sean \mathcal{H} una familia normal, g una función analítica y f una función analítica definida por lo menos en la clausura de la unión de las imágenes de las funciones $h \in \mathcal{H}$. Entonces

$$f_*(\mathcal{H}) = \{f \circ h : h \in \mathcal{H}\} \quad \text{y} \quad g^*(\mathcal{H}) = \{h \circ g : h \in \mathcal{H}\},$$

son familias normales.

Proof. La prueba se encuentra en [8], página 65. □

Ejemplo 3.5. Si en algún momento uno de los polinomios, digamos f_N , se factoriza como composición

$$f_N = g_M \circ \cdots \circ g_1,$$

entonces entre F_{N-1} y F_N se puede intercalar

$$F_{N-1}, g_1 \circ F_{N-1}, g_2 \circ g_1 \circ F_{N-1}, \dots, g_M \circ \cdots \circ g_1 \circ F_{N-1} = f_N \circ F_{N-1} = F_N.$$

El interés de esta generalización es aprovechar un hecho elemental de la teoría de familias normales.

Lema 3.6. Definamos $\widetilde{f}_1 = f_2, \dots, \widetilde{f}_n = f_{n+1}$ y pongamos $\widetilde{F}_n = \widetilde{f}_n \circ \cdots \circ \widetilde{f}_1$. Entonces tenemos

$$f_1^{-1}(\mathcal{F}(\widetilde{f}_n)) = \mathcal{F}(f_n),$$

Samir Sánchez

acá $\mathcal{F}(\widetilde{f}_n)$ y $\mathcal{F}(f_n)$ denotan el conjunto de Fatou de la familias (\widetilde{F}_n) y (F_n) , respectivamente. Similarmente para los conjuntos de Julia.

Proof. En efecto, consideremos $z \in f_1^{-1}(\mathcal{F}(\widetilde{f}_n))$. Entonces tendremos $f_1(z) \in \mathcal{F}(\widetilde{f}_n)$ y por definición existe una vecindad U_1 de $f_1(z)$ de manera que la familia (\widetilde{F}_n) es normal en U_1 . Debido a la continuidad de f_1 el conjunto $U = f_1^{-1}(U_1)$ es una vecindad de z . Por la proposición 3.4, la familia $\widetilde{F}_n \circ f_1$ es normal en U . Sin embargo, de acuerdo con la definición se tiene

$$\begin{aligned}\widetilde{F}_n \circ f_1 &= \widetilde{f}_n \circ \cdots \circ \widetilde{f}_1 \circ f_1 \\ &= f_{n+1} \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1 \\ &= F_{n+1}.\end{aligned}$$

Así, la familia $(F_{n+1}) = \{F_2, F_3, \dots\}$ es normal. Con ello la familia $((F_{n+1}) \sqcup F_1) = \{F_1, F_2, \dots\} = (F_n)$ también es normal en U . Con esto hemos conseguido una vecindad para z donde la familia (F_n) es normal. En consecuencia logramos $z \in \mathcal{F}(c_n)$.

Recíprocamente, consideremos $z \in \mathcal{F}(f_n)$. Por definición existe una vecindad U de z donde la familia (F_n) es normal. Al partir de U se tiene la secuencia

$$U \xrightarrow{f_1} F_1(U) \xrightarrow{f_2} F_2(U) \xrightarrow{f_3} \cdots \xrightarrow{f_{n+1}} F_{n+1}(U).$$

Pero la definición $\widetilde{f}_i = f_{i+1}$, indica que la secuencia anterior también puede verse como

$$U \xrightarrow{f_1} F_1(U) \xrightarrow{\widetilde{f}_1} \widetilde{F}_1(U) \rightarrow \cdots \xrightarrow{\widetilde{f}_n} \widetilde{F}_n(U).$$

Es decir, lo anterior se resume en

$$U \xrightarrow{f_1} f_1(U) \xrightarrow{\widetilde{F}_n} \widetilde{F}_n(U).$$

Debido a que la familia $(F_n) = \{F_1, F_2, \dots\}$ es normal en U , la familia $(F_{n+1}) = \{F_2, F_3, \dots\} = ((\widetilde{F}_n) \sqcup f_1)$ también lo es. De la proposición 3.4 la familia (\widetilde{F}_n) resulta normal en $f_1(U)$. Así tenemos $f_1(z) \in \mathcal{F}(\widetilde{f}_n)$, lo cual significa $z \in f_1^{-1}(\mathcal{F}(\widetilde{f}_n))$. \square

Nos beneficiaremos de este resultado para el caso particular de interés. Con ello en mente, en la composición de polinomios de la forma $f_n(z) = z^d + c_n$, para evitar confusiones notacionales, convengamos en referirnos por $\mathcal{F}(c_{n+1})$ al conjunto de Fatou de la familia (\widetilde{F}_n) , donde $\widetilde{F}_n = f_{n+1} \circ f_n \circ \cdots \circ f_3 \circ f_2$. En este caso el lema anterior se traduce en

$$\mathcal{F}(c_{n+1}) = \mathcal{F}(\widetilde{f}_n) = f_1(\mathcal{F}(f_n)) = f_1(\mathcal{F}(c_n)) = F_1(\mathcal{F}(c_n)).$$

De manera general, al tomar $m \geq 1$, denotamos por $\mathcal{F}(c_{n+m})$ al conjunto de Fatou de la familia desplazada $f_{n+m} \circ f_{n+m-1} \circ \cdots \circ f_{m+1}$. Y de forma similar se denotará el correspondiente conjunto de Julia. Gracias a este último ejemplo y con la notación recién convenida, el siguiente resultado es trivial.

Corolario 3.7. *Para todo $m > 0$ se satisface $F_m(\mathcal{F}(c_n)) = \mathcal{F}(c_{n+m})$ y $F_m(\mathcal{J}(c_n)) = \mathcal{J}(c_{n+m})$.*

Corolario 3.8. *Si $z_0 \in \mathcal{J}(c_n)$, entonces $F_k^{-1}(F_k(z_0)) \subset \mathcal{J}(c_n)$. De modo análogo, si $z_0 \in \mathcal{F}(c_n)$, entonces $F_k^{-1}(F_k(z_0)) \subset \mathcal{F}(c_n)$. \square*

Es decir, tanto el conjunto de Julia como el conjunto de Fatou son co-invariantes, en el sentido que todo co-punto de un punto en el conjunto de Julia (Fatou) también pertenece al conjunto de Julia (Fatou). Esto remeda al hecho de que si un punto comparte gran órbita con un punto en el conjunto de Julia (Fatou), entonces todos, simultáneamente, pertenecen al conjunto de Julia (o Fatou).

Corolario 3.9. *Los conjuntos de Fatou $\mathcal{F}(c_n)$ y de Julia $\mathcal{J}(c_n)$ son co-invariantes en el sentido que cumplen*

$$F_k^{-1}(F_k(\mathcal{J}(c_n))) = \mathcal{J}(c_n) \quad \text{y} \quad F_k^{-1}(F_k(\mathcal{F}(c_n))) = \mathcal{F}(c_n).$$

Proof. Esto es inmediato del lema y los corolarios anteriores. \square

Notemos que los resultados anteriores son válidos para cualquiera de las tres subfamilias de \mathcal{P} .

Nos enfocaremos nuevamente en la familia \mathcal{P} . Un resultado importante que se hereda de la teoría clásica, independientemente de a cual de las tres familias pertenezca la sucesión de polinomios (f_n) , es que el conjunto de Julia es infinito.

Teorema 3.10. *El conjunto de Julia $\mathcal{J}(c_n)$ tiene infinitos elementos.*

Proof. Si por contradicción $\mathcal{J}(c_n)$ fuese un conjunto finito, entonces el número de elementos de $F_k(\mathcal{J}(c_n))$ eventualmente se estancará a medida que k avance pues el número de elementos no puede decrecer por siempre. Como por el lema 3.6 el conjunto $\mathcal{J}(c_n)$ es finito si y solo si $\mathcal{J}(c_{n+k})$ es finito, asumimos sin más comentarios que $F_k(\mathcal{J}(c_n))$ tiene siempre el mismo tamaño. Tomemos z_0 arbitrario en $F_k(\mathcal{J}(c_n))$ y lo enviamos a $z_0^d + c_{k+1} \in F_{k+1}(\mathcal{J}(c_n))$ y contamos las preimágenes de este último. Sabemos que las d preimágenes se encuentran en $F_k(\mathcal{J}(c_n))$ y debido a que la cantidad de elementos permanece constante, las d preimágenes deben ser la misma; ello solo acontece cuando $z_0 = 0$. Ya que tomamos z_0 de manera arbitraria, se tiene $c_n = 0$ persistentemente. Esto se reduce al estudio de $z \mapsto z^d$ y el conjunto de Julia de esta dinámica es $\partial\mathbb{D}$. Esto es imposible, debido a que hemos supuesto que $\mathcal{J}(c_n)$ es finito. \square

El resultado anterior nos permite concluir que la cantidad de elementos del conjunto de Julia $\mathcal{J}(c_n)$ es infinito, independientemente de a cual de las tres clases \mathcal{P}_I , \mathcal{P}_{II} o \mathcal{P}_{III} pertenezca la sucesión de polinomios (f_n) . Ello se debe a que la familia \mathcal{P} está conformada por polinomios mónicos y unicríticos. Si, por ejemplo, cambiamos el tipo de polinomios que compondremos, podemos toparnos con resultados diametralmente opuestos a los obtenidos hasta ahora, tal y como lo hizo Büger en [5].

Ejemplo 3.11. Consideremos los polinomios

$$f_n(z) = n^{d^n} z^d.$$

con $d \geq 2$. Es claro que la sucesión formada por este tipo de polinomios no pertenece a \mathcal{P} . Aún así podemos notar que el conjunto $M = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} :$

$|z| > 1\}$ es un dominio invariante y (F_n) converge a ∞ uniformemente en compactos de M . Por otro lado, una manipulación rutinaria lleva a

$$\begin{aligned} |F_1(z)| &= |1^{d^1} z^d| &&= |z|^d \\ |F_2(z)| &= |2^{d^2} (F_1(z))^d| &&= 2^{d^2} |z|^{d^2} \\ |F_3(z)| &= |3^{d^3} (F_2(z))^d| &&= 3^{d^3} 2^{d^3} |z|^{d^3} \\ |F_n(z)| &= |n^{d^n} (F_{n-1}(z))^d| &&= n^{d^n} \dots 2^{d^n} |z|^{d^n}. \end{aligned}$$

Así conseguimos $|F_n(z)| \geq n^{d^n} |z|^{d^n} = (n|z|)^{d^n}$. De este modo, la familia (F_n) converge uniformemente a ∞ en $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$, y obtenemos $\mathcal{F}(c_n) = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ con $\mathcal{J}(c_n) = \{0\}$ finito.

Después de ver esta curiosidad retornaremos a las sucesiones de nuestro interés.

Los siguientes resultados pretenden ser una generalización de los resultados conocidos en la teoría clásica pero necesitan de la condición $(f_n) \in \mathcal{P}_I$. La existencia de una vecindad invariante de infinito es de suma importancia; sin él podrían fallar. Para los siguientes resultados, y hasta que se diga lo contrario, convendremos $(f_n) \in \mathcal{P}_I$ con un dominio M vecindad conexa invariante de infinito.

Antes de probar que el conjunto de Julia es la frontera de la cuenca de atracción de infinito necesitaremos algunos pormenores técnicos.

Lema 3.12. *Si $z \in \mathcal{J}(c_n)$, entonces se tiene $F_n(z) \notin M$ para todo n . Además $\sup_{z \in \mathcal{J}(c_n)} |F_n(z)|$ es acotado independientemente de z y de n .*

Proof. Supongamos por contradicción que existe $z_0 \in \mathcal{J}(c_n)$ con $F_k(z_0) \in M$ para algún $k > 0$. Por una caracterización ofrecida antes, la cuenca atractora de ∞ , en adelante $\mathcal{A}_\infty(c_n)$, es el conjunto de puntos que eventualmente caen en M . De este modo conseguimos $z_0 \in \mathcal{A}_\infty(c_n) \subset \mathcal{F}(c_n)$, lo cual es absurdo. Por lo expresado antes, la órbita de $z \in \mathcal{J}(c_n)$ nunca visita M ; en particular la sucesión $|F_n(z)|$ es acotada. \square

Lema 3.13. *Sea $r > 0$ tal que $\{z \in \widehat{\mathbb{C}} : |z| > r\}$ está en M . Entonces se cumple $z \in \mathcal{A}_\infty(c_n)$ si y solo si existe N tal que $|F_n(z)| > r$ cuando $n \geq N$.*

Proof. Supongamos que existe N de manera que se tenga $|F_n(z)| > r$ cuando $n \geq N$. Ello significa $F_n(z) \in \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : |z| > r\} \subset M$; es decir, z eventualmente pertenecerá a M y por tanto a $\mathcal{A}_\infty(c_n)$. La recíproca es trivial. \square

Notemos que esto no es válido para la familia \mathcal{P}_{II} debido a que no existe ningún dominio invariante que contenga ∞ .

De la definición de $\mathcal{A}_\infty(c_n)$ se obtiene gratis que es abierto. Sin embargo, el lema anterior nos brinda una forma contundente de comprobarlo.

Corolario 3.14. *Si $r > 0$ es como en el lema 3.13, entonces se tiene $\mathcal{A}_\infty(c_n) = \bigcup_{n \geq 0} (F_n)^{-1}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}_r)$.*

Proof. Esto es reescribir en símbolos el lema anterior. \square

De esta manera reconstruimos $\mathcal{A}_\infty(c_n)$ como una unión enumerable de conjuntos abiertos y es por tanto abierto.

A continuación exhibiremos el conjunto de Julia como la frontera de la cuenca de atracción de infinito.

Proposición 3.15. *Sea $(f_n) \in \mathcal{P}_I$. Entonces se tiene $\partial\mathcal{A}_\infty(c_n) = \mathcal{J}(c_n) = \partial\mathcal{K}(c_n)$.*

Proof. Tomemos $z \in \partial\mathcal{A}_\infty(c_n) = \overline{\mathcal{A}_\infty(c_n)} \cap \overline{\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{A}_\infty(c_n)}$, de modo que existen sucesiones $z_t \in \mathcal{A}_\infty$ y $\bar{z}_t \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{A}_\infty(c_n)$ tales que $z_t \rightarrow z$ y $\bar{z}_t \rightarrow z$. Si suponemos $z \notin \mathcal{J}(c_n)$, tendremos $z \in \mathcal{F}(c_n)$, es decir, (F_n) será normal en alguna vecindad U de z . Eso quiere decir que (F_n) posee una subsucesión (F_{n_k}) que converge uniformemente en compactos de U a una función analítica F . Sin embargo, tendremos

$$F(z) = \lim F_{n_k}(z_t) = \infty,$$

pues $z_t \in \mathcal{A}_\infty(c_n)$ y la convergencia es uniforme en compactos. Por otro lado, con $\bar{z}_t \notin \mathcal{A}_\infty(c_n)$ tendremos

$$F(z) = \lim F_{n_k}(\bar{z}_t) \neq \infty,$$

y esto es una contradicción. Concluimos entonces $z \in \mathcal{J}(c_n)$.

Para la inclusión recíproca utilizaremos el hecho de que todo dominio abierto D que se interseque con el conjunto de Julia $\mathcal{J}(c_n)$ también intersectará a $\mathcal{A}_\infty(c_n)$. En efecto, si suponemos $D \cap \mathcal{A}_\infty(c_n) = \emptyset$, lo contrario, entonces tendremos

$$D \subset \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{A}_\infty(c_n) = \mathcal{K}(c_n) \subset \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : |F_k(z)| \leq r\}.$$

Por lo tanto (F_n) resulta ser acotada en D , y en particular se obtendrá

$$\sup\{|F_n(z)| : z \in D\} < r,$$

donde $r > 0$ es como en el lema 3.13. Esto significa que (F_n) es localmente acotada en D , y por Montel, (F_n) será normal en D , así $D \subset \mathcal{F}(c_n)$. Ello es una contradicción pues $D \cap \mathcal{J}(c_n) \neq \emptyset$. \square

La compacidad del conjunto lleno de Julia y del conjunto de Julia también se mantiene.

Lema 3.16. *Los conjuntos $\mathcal{J}(c_n)$ y $\mathcal{K}(c_n)$ son compactos.*

Proof. Los conjuntos $\mathcal{J}(c_n)$ y $\mathcal{K}(c_n)$ son cerrados por ser complemento de abiertos. Además por el lema 3.13, sabemos que se cumple

$$\partial\mathcal{J}(c_n) \subset \partial\mathcal{K}(c_n) \subset \mathcal{K}(c_n) \subset \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : |z| \leq r\}.$$

En consecuencia serán acotados y por lo tanto compactos. \square

Un conjunto es llamado **perfecto** si es cerrado y no contiene puntos aislados. Debido a que $\mathcal{J}(c_n)$ es cerrado, para confirmar que $\mathcal{J}(c_n)$ es perfecto bastará descartar que tenga puntos aislados.

Teorema 3.17. *El conjunto de Julia es perfecto.*

Proof. Supongamos por contradicción que $\mathcal{J}(c_n)$ admite puntos aislados. Consideremos $z_0 \in \mathcal{J}(c_n)$ punto aislado y $s > 0$ lo suficientemente pequeño para tener $\overline{\mathbb{D}_s(z_0)} \setminus \{z_0\} \subset \mathcal{F}(c_n)$. Al estar contenido en el conjunto de Fatou la familia (F_n) será normal en $\overline{\mathbb{D}_s(z_0)} \setminus \{z_0\}$. Por la proposición 3.15, los puntos que rodean a z_0 estarán en $\mathcal{A}_\infty(c_n)$, la cuenca de atracción de infinito.

Luego, como $\overline{\mathbb{D}_s(z_0)} \setminus \{z_0\} \subset \mathcal{F}(c_n)$ se tendrá $F_n \rightarrow \infty$ uniformemente en compactos de $\overline{\mathbb{D}_s(z_0)} \setminus \{z_0\}$. En particular ello sucede para $\partial\mathbb{D}_s(z_0)$ y así, existe $N > 0$ para el cual se cumple $F_N(\partial\mathbb{D}_s(z_0)) \subset M$, donde M es un dominio invariante inherente a la clase \mathcal{P}_I . Tengamos en cuenta que se tiene $F_N(z_0) \notin M$ pues $z_0 \in \mathcal{J}(c_n)$. Notemos también que se satisface $F_N(z_0) \notin F_N(\partial\mathbb{D}_\rho(z_0))$ para $\rho \leq s$ no nulo puesto que $F_N(z_0)$ está en el conjunto de Julia y imagen del círculo, en el conjunto de Fatou.

Pongamos $\gamma_\rho = F_N(\partial\mathbb{D}_\rho(z_0))$. En tanto \tilde{z} no pertenezca a la imagen de γ_ρ el valor

$$W(\gamma_\rho, \tilde{z}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{dz}{z - \tilde{z}},$$

llamado **número de vueltas** que le da γ_ρ a \tilde{z} , es un entero. Es más, se sabe que como función es continua en ρ y \tilde{z} . En efecto, es localmente constante pues solo toma valores enteros. Además se sabe que vale 0 si \tilde{z} pertenece a la componente no acotada de $\mathbb{C} \setminus \gamma_\rho$.

Como ya hemos indicado, para $\rho \leq s$ tenemos $F_N(z_0) \notin \gamma_\rho$. De este modo vemos que $W(\gamma_\rho, F_N(z_0))$ vale siempre lo mismo. Resulta elemental que en este caso se tiene $W(\gamma_\rho, F_N(z_0)) = \deg_{z_0} F_N > 0$.

Para cada $\tilde{z} \neq F_N(z_0)$, por continuidad tenemos $\tilde{z} \notin F_N(\mathbb{D}_\rho(z_0))$ si ρ es pequeño. Así \tilde{z} está en la componente no acotada de γ_ρ y por lo ya indicado tendremos $W(\gamma_\rho, \tilde{z}) = 0$. Sin embargo al tenerse $\gamma_s \subset M$, resulta que todo $\mathbb{C} \setminus M$ está en la misma componente de $\mathbb{C} \setminus \gamma_s$ y por lo ya explicado tendremos $W(\gamma_s, w) = W(\gamma_\rho, F_N(z_0)) > 0$ en tanto se satisfaga $w \in \mathbb{C} \setminus M$. Pero para $w \in (\mathbb{C} \setminus M) \setminus \{F_N(z_0)\}$ tenemos $W(\gamma_\rho, w) \neq W(\gamma_s, w)$ cuando ρ es pequeño, lo que solo puede significar que $W(\gamma_\rho, w)$ no está definido para todo $\rho \in (0, s]$. En particular ten-

dremos $w \in \gamma_\rho \subset \mathcal{F}(c_n)$ para algún ρ entre 0 y s . De este modo concluimos la inclusión $(\mathbb{C} \setminus M) \setminus \{F_N(z_0)\} \subset \mathcal{F}(c_{n+N})$ y por tanto tendremos $\mathcal{J}(c_{n+N}) = \{F_N(z_0)\}$, lo cual es imposible por el teorema 3.10. En conclusión $\mathcal{J}(c_n)$ es perfecto. \square

Un conjunto de un espacio topológico es llamado **nunca denso** si el interior de su clausura es vacío. Para concluir que $\mathcal{J}(c_n)$ es nunca denso bastará probar que su interior es vacío.

Teorema 3.18. *El conjunto de Julia $\mathcal{J}(c_n)$ es nunca denso.*

Proof. Notemos que las sucesivas imágenes del interior del conjunto de Julia son acotados por el lema 3.12, y, luego, por el teorema de Montel, forman parte del conjunto de Fatou. Este abierto al estar contenido tanto en el conjunto de Julia como en el conjunto de Fatou, obligatoriamente es vacío. \square

Otros resultados importantes que examinaremos están relacionados con la conexidad de la cuenca de atracción de infinito y del conjunto de Julia.

La cuenca de atracción de infinito $\mathcal{A}_\infty(c_n)$ es un conjunto abierto y por tanto se puede descomponer como unión disjunta enumerable de las componentes conexas que la conforman. El primer objetivo es probar que $\mathcal{A}_\infty(c_n)$ está conformado por una sola pieza.

Teorema 3.19. *Sea $(f_n) \in \mathcal{P}_I$. Entonces la cuenca de atracción de infinito $\mathcal{A}_\infty(c_n)$ es conexa.*

Proof. Sea V la componente conexa de $\mathcal{A}_\infty(c_n)$ que contiene al conjunto $K_r = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : |z| > r\} \subset M$, de modo que cualquier otra componente de $\mathcal{A}_\infty(c_n)$ se encontrará recluida en $\overline{\mathbb{D}_r}$. Notemos que se cumple $\partial V \cap \mathcal{A}_\infty(c_n) = \emptyset$, así se consigue $\partial V \subset \mathcal{K}(c_n)$. Al ser $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \partial V$ conjunto abierto puede escribirse como unión numerable de sus componentes conexas. Sean V_0, V_1, \dots las componentes conexas de $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \partial V$ con $V_0 = V$. Observemos que se satisface $\partial V_i \subset \partial V \subset \mathcal{K}(c_n)$. Además, para

toda semilla $w \in V_i$ con $i \neq 0$, se sigue del principio del módulo máximo la cadena de desigualdades

$$|F_k(z_0)| \leq \sup_{w \in V} |F_k(w)| \leq \sup_{w \in \partial V} |F_k(w)| \leq \sup_{w \in \mathcal{K}(c_n)} |F_k(w)| \leq r.$$

Ello implica $z_0 \in \mathcal{K}(c_n)$, pues su órbita es acotada. Por tanto ningún V_i con $i \neq 0$ se topa con $\mathcal{A}_\infty(c_n)$. De este modo, la cuenca de atracción $\mathcal{A}_\infty(c_n)$ es V_0 , conexo. \square

En aras de caracterizar cuándo $\mathcal{A}_\infty(c_n)$, la cuenca de atracción de infinito, es un conjunto simplemente conexo será necesario el siguiente resultado técnico.

Lema 3.20. *Para $m > 0$ se tiene $F_m(\mathcal{A}_\infty(c_n)) = \mathcal{A}_\infty(c_{n+m})$.*

Proof. Trabajaremos por inducción en m . Para el caso $m = 1$ usamos el mismo razonamiento empleado en lema 3.6, con la sutil diferencia de que ahora la convergencia es uniforme en compactos a ∞ . Para detalles adicionales el corolario 3.7 resulta útil. \square

Recordemos que para un espacio topológico X existe un importante invariante topológico llamado **característica de Euler**, denotado por $\chi(X)$. Con el objetivo de definir $\chi(X)$, necesitaremos del concepto de *descomposición celular* de un espacio topológico. Informalmente, una triangularización finita τ de X es “dividir” X en un número finito de regiones “poligonales”, a las que llamaremos **caras**, por arcos que no se autointersecan, llamados **lados**, que se unen en **vértices**. Así, *grosso modo*, una triangulación de un espacio topológico luce como un “poliedro topológico”. La característica de Euler de una triangularización finita τ de un espacio topológico X se define como

$$\chi(X, \tau) = C(\tau) - L(\tau) + V(\tau),$$

donde $C(\tau)$, $L(\tau)$ y $V(\tau)$ denotan, respectivamente, la cantidad de caras, lados y vértices en τ . La característica de Euler, como dijimos antes,

es un invariante topológico que además es independiente de la triangularización escogida, así que convendremos por denotar $\chi(X)$ dicho valor. Por ejemplo, para toda variedad compacta de dimensión 2, es decir superficies de Riemann compactas, siempre es posible encontrar una triangularización finita. En caso no pueda proveerse a X de una triangularización finita, convendremos en que la característica de Euler es $-\infty$.

Ejemplo 3.21. El plano complejo y el disco unitario pueden presentarse como una única célula de dimensión 2. Por lo tanto se tiene $\chi(\mathbb{C}) = \chi(\mathbb{D}) = 1 - 0 + 0 = 1$. El círculo \mathbb{S}^1 lo imaginamos como un segmento con extremos identificados, es decir, un lado y un vértice pero ninguna cara, de manera que se tiene $\chi(\mathbb{S}^1) = 0 - 1 + 1 = 0$. La esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, posee una cara, el plano \mathbb{C} , un vértice (en ∞) y 0 lados; en consecuencia $\chi(\widehat{\mathbb{C}}) = 1 - 0 + 1 = 2$.

El siguiente teorema nos brinda información importante sobre la cantidad de puntos críticos de una función analítica propia en función de la característica de Euler de los conjuntos de partida y de llegada.

Teorema 3.22 (Fórmula de Riemann-Hurwitz). *Sea f una función analítica entre superficies de Riemann compactas. Supongamos que la restricción $f : U \rightarrow V$ es propia de grado d . Entonces la cantidad de puntos críticos de f en U , contados con multiplicidad, está dado por*

$$d\chi(V) - \chi(U).$$

Proof. La prueba se encuentra en [8], página 44. □

Ejemplo 3.23. Consideremos la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{D}^* &\rightarrow \mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{0\} \\ z &\mapsto f(z) = z^d \end{aligned}$$

Por Riemann-Hurwitz existen

$$d\chi(\mathbb{D}^*) - \chi(\mathbb{D}^*)$$

puntos críticos. Debido a que se tiene $\chi(\mathbb{D}^*) = 0$, corroboramos que f no posee puntos críticos en \mathbb{D}^* .

Se sabe que para regiones planas abiertas y conexas la característica de Euler es a lo mucho 1.

Ejemplo 3.24. Recordemos que para el caso polinomial $z \mapsto z^d + c$, la cuenca de atracción de infinito \mathcal{A}_∞ es totalmente invariante. Además se sabe que \mathcal{A}_∞ es simplemente conexo si y solo si no contiene al origen (el único punto crítico finito en este contexto); de lo contrario esta región será infinitamente conexa. Esta dicotomía puede explicarse con la fórmula de Riemann-Hurwitz. Cuando la característica de Euler de \mathcal{A}_∞ es finita, ésta será menor o igual a 1, y la fórmula de Riemann-Hurwitz predice que hay $(d - 1)\chi(\mathcal{A}_\infty(f)) \leq d - 1$ puntos críticos; pero como $d - 1$ es la multiplicidad crítica de ∞ , concluimos, por un lado, que \mathcal{A}_∞ tiene característica de Euler igual a 1 (es decir, es simplemente conexo) y, por otro lado, que los puntos críticos adicionales (es decir, el 0) no pertenecen a esta cuenca de atracción.

Juguemos con estas mismas ideas. La importancia de conocer la característica de Euler de $\mathcal{A}_\infty(c_n)$ se debe a que el complemento de todo conjunto simplemente conexo en $\widehat{\mathbb{C}}$ es conexo, por lo tanto, mientras la característica de Euler de $\mathcal{A}_\infty(c_n)$ sea 1 el conjunto lleno de Julia $\mathcal{K}(c_n)$ será conexo.

La cantidad de puntos críticos del polinomio f_{m+1} de grado d en $\mathcal{A}_\infty(c_{n+m})$ depende de si 0 está o no incluido en esta región. En caso de que lo esté, la cantidad de puntos críticos será $2(d - 1)$, pues 0 e ∞ poseen ambos multiplicidad crítica $d - 1$, de lo contrario, la cantidad de puntos críticos será apenas $d - 1$. Por Riemann-Hurwitz, la cantidad de puntos críticos de f_{m+1} en $\mathcal{A}_\infty(c_{n+m})$ está dada por

$$d - 1 + (d - 1)\mathbb{1}_{\mathcal{A}_\infty(c_{n+m})}(0) = d\chi(\mathcal{A}_\infty(c_{n+m+1})) - \chi(\mathcal{A}_\infty(c_{n+m})), \quad (3.1)$$

donde $\mathbb{1}_{\mathcal{A}_\infty(c_{n+m})}$ denota la función característica de $\mathcal{A}_\infty(c_{n+m})$. Al

manipular la ecuación conseguimos la igualdad

$$(d-1)\mathbb{1}_{\mathcal{A}_\infty(c_{n+m})}(0) = d[\chi(\mathcal{A}_\infty(c_{n+m+1})) - 1] - [\chi(\mathcal{A}_\infty(c_{n+m})) - 1]. \quad (3.2)$$

Los siguientes resultados se desprenden casi de inmediato de esta observación.

Corolario 3.25. *Para $m \geq 0$ la condición $\chi(\mathcal{A}_\infty(c_{n+m})) > -\infty$ es equivalente a $\chi(\mathcal{A}_\infty(c_{n+m+1})) > -\infty$.*

Proof. El miembro de la izquierda de la ecuación 3.2 es no negativo y finito, de este modo la igualdad solo tendrá sentido cuando ambos valores, $\chi(\mathcal{A}_\infty(c_{n+m}))$ y $\chi(\mathcal{A}_\infty(c_{n+m+1}))$ sean finitos o infinitos a la vez. □

Corolario 3.26. *Si $\chi(\mathcal{A}_\infty(c_{n+m}))$ es finito, entonces se cumple*

$$d[1 - \chi(\mathcal{A}_\infty(c_{n+m+1}))] \leq 1 - \chi(\mathcal{A}_\infty(c_{n+m})).$$

Proof. Por el corolario anterior tendremos también $\chi(\mathcal{A}_\infty(c_{n+m+1})) > -\infty$. El segundo miembro de la ecuación 3.2 es finito mientras que el lado izquierdo es no negativo. Basta manipular la ecuación para obtener lo deseado. □

Observación 3.27. Es inmediato del corolario anterior que la secuencia $1 - \chi(\mathcal{A}_\infty(c_n)), 1 - \chi(\mathcal{A}_\infty(c_{n+1})), \dots$ es una sucesión de números enteros no negativos estrictamente decreciente a menos que tome el valor 0, donde se estancará. Ello significa que la cantidad de “agujeros” decrecerá hasta que alguno de los $\mathcal{A}_\infty(c_{n+m})$ sea simplemente conexo y a partir de ese instante todos lo serán.

Con el fin de establecer condiciones necesarias y suficientes para que $\mathcal{A}_\infty(c_n)$ sea simplemente conexo presentamos algunos resultados técnicos.

Lema 3.28. *Si $\mathcal{A}_\infty(c_{n+m})$ es simplemente conexo entonces $0 \notin \mathcal{A}_\infty(c_{n+m})$.*

Samir Sánchez

Proof. Supongamos por contradicción $0 \in \mathcal{A}_\infty(c_{n+m})$. Por Riemann-Hurwitz tenemos entonces

$$2d - 2 = d\chi(\mathcal{A}_\infty(c_{n+m+1})) - \chi(\mathcal{A}_\infty(c_{n+m})) = d\chi(\mathcal{A}_\infty(c_{n+m+1})) - 1$$

de donde conseguimos $\chi(\mathcal{A}_\infty(c_{n+m+1})) = 2 - \frac{1}{d}$, imposible dado que la característica de Euler debe ser un número entero. \square

El siguiente corolario se deriva fácilmente del lema anterior.

Corolario 3.29. *Cuando $\mathcal{A}_\infty(c_{n+m})$ es simplemente conexo se tiene $0 \notin \mathcal{A}_\infty(c_{n+m+k})$.*

Proof. Es inmediato del corolario 3.26 que se tiene $\chi(\mathcal{A}_\infty(c_{n+m+k})) = 1$ y por consiguiente $0 \notin \mathcal{A}_\infty(c_{n+m+k})$. \square

La siguiente proposición resume nuestros hallazgos cuando ya se sabe que la característica de Euler de $\mathcal{A}_\infty(c_n)$ es finita.

Proposición 3.30. *Si $-\infty < \chi(\mathcal{A}_\infty(c_n)) < 1$ entonces existe $N > 0$ tal que para todo $m \geq N$ se tiene $\chi(\mathcal{A}_\infty(c_{n+m})) = 1$ y $0 \notin \mathcal{A}_\infty(c_{n+m})$.*

Proof. De los corolarios 3.25 y 3.26 tenemos que $\chi(\mathcal{A}_\infty(c_{n+m}))$ es finito y cumple

$$0 \leq 1 - \chi(\mathcal{A}_\infty(c_{n+m})) \leq \frac{1 - \chi(\mathcal{A}_\infty(c_n))}{d^m}.$$

Al tomar el límite con m conseguimos que el valor $1 - \chi(\mathcal{A}_\infty(c_{n+m}))$ debe ser 0 para $m \geq N$, donde N es el primer entero para el cual $\frac{1 - \chi(\mathcal{A}_\infty(c_n))}{d^m}$ es menor que 1. \square

El siguiente teorema confirmará que en este contexto, al igual que en el caso polinomial, si ∞ no atrae puntos críticos entonces $\mathcal{A}_\infty(c_n)$ tendrá que ser simplemente conexo.

Teorema 3.31. *La cuenca de atracción de infinito $\mathcal{A}_\infty(c_n)$ es simplemente conexa si y solo si se tiene $0 \notin \mathcal{A}_\infty(c_{n+m})$ para todo $m \geq 0$.*

Proof. Supongamos $0 \notin \mathcal{A}_\infty(c_{n+m})$ para todo $m \geq 0$, es decir $\mathcal{A}_\infty(c_n)$ no contiene ningún otro punto crítico aparte de ∞ . Por el trabajo realizado en la segunda sección, sin pérdida de generalidad podemos considerar $M = K_r = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}_r}$ en el corolario 3.14, es decir, escribir

$$\mathcal{A}_\infty(c_n) = \bigcup_{k \geq 1} F_k^{-1}(M).$$

Notemos que M es simplemente conexo pues es el complemento de un disco en la esfera, por lo tanto tendremos $\chi(M) = 1$. Debido a la invarianza de M , también se tiene $M \subset F_1^{-1}(M)$. De este modo $F_1^{-1}(M) \subset \mathcal{A}_\infty(c_n)$ no puede contener otro punto crítico que no sea ∞ . Al tener ∞ multiplicidad d , la cantidad de puntos críticos en $F_1^{-1}(M)$ es precisamente $d - 1$. Además, $F_1^{-1}(M)$ es conexo. En efecto, al ser $F_1 : F_1^{-1}(M) \rightarrow M$ función propia, con grado d cerca de ∞ , el grado topológico será d . Ello significa que no hay otra preimagen de ∞ . Así, necesariamente $F_1^{-1}(M)$ consta de una pieza.

En vista de que $F_1 : F_1^{-1}(M) \rightarrow M$ es de grado d , la fórmula de Riemann-Hurwitz indica que la cantidad de puntos críticos, es decir $d - 1$, será

$$d - 1 = d\chi(M) - \chi(F_1^{-1}(M)) = d - \chi(F_1^{-1}(M)),$$

de donde obtenemos $1 = \chi(F_1^{-1}(M))$. Así, al ser $F_1^{-1}(M)$ un subconjunto abierto y conexo de la esfera de Riemann que posee característica de Euler igual a 1, resulta simplemente conexo. Como además se tiene $F_{k+1}^{-1}(M) \subset F_k^{-1}(M)$, al repetir el mismo razonamiento también $F_k^{-1}(M)$ resulta simplemente conexo. Por lo tanto, al ser $\mathcal{A}_\infty(c_n)$ unión de conjuntos simplemente conexos encajados (por el corolario 3.14) se concluye que $\mathcal{A}_\infty(c_n)$ es simplemente conexo.

La recíproca se sigue de la proposición 3.30. □

El teorema anterior explica por qué en caso ∞ atraiga puntos críticos $\mathcal{A}_\infty(c_n)$ no es simplemente conexo. Acá hay que distinguir dos casos: si atrae finitos puntos críticos entonces $\chi(\mathcal{A}_\infty(c_n))$ será finita, de lo contrario será infinita. Si $\chi(\mathcal{A}_\infty(c_n))$ es finito aplicamos la proposición 3.30

para buscar algún $\mathcal{A}_\infty(c_{n+m})$ que sea simplemente conexo. Una vez que lo hallamos, procedemos con Riemann-Hurwitz hacia atrás para determinar la cantidad (finita) de componentes conexas del conjunto lleno de Julia.

Ejemplo 3.32. Para grado $d = 2$, consideremos $c_0 = 1, c_1 = -1.2$ y $c_n = 0$ para $n \geq 2$. La dinámica de la familia desplazada dos unidades es $z \mapsto z^2$ cuyo conjunto lleno de Julia es la clausura del disco unitario y la cuenca de atracción de infinito $\mathcal{A}_\infty(c_{n+2})$ es simplemente conexa. Como se tiene $0^2 + c_1 = -1.2 \in \mathcal{A}_\infty(c_{n+2})$, de Riemann-Hurwitz logramos $\chi(\mathcal{A}_\infty(c_{n+1})) = 0$, o lo que es lo mismo decir, el conjunto lleno de Julia $\mathcal{K}(c_{n+1})$ posee dos componentes (ver figura 5(a)). Asimismo, la imagen de 0 bajo el primer iterado es 1 el cual sí pertenece a $\mathcal{K}(c_{n+1})$, es decir, esta vez el punto crítico no escapa: al aplicar Riemann-Hurwitz observamos que $\mathcal{K}(c_n)$ posee tres piezas (ver figura 5(b)).

Ejemplo 3.33. Trabajemos con los mismos valores del caso anterior, excepto $c_0 = 0$. En este caso la modificación ocurre apenas en $\mathcal{A}_\infty(c_n)$. En vista de que el punto crítico escapa, al aplicar Riemann-Hurwitz concluimos que $\mathcal{K}(c_n)$ posee cuatro componentes (ver figura 6).

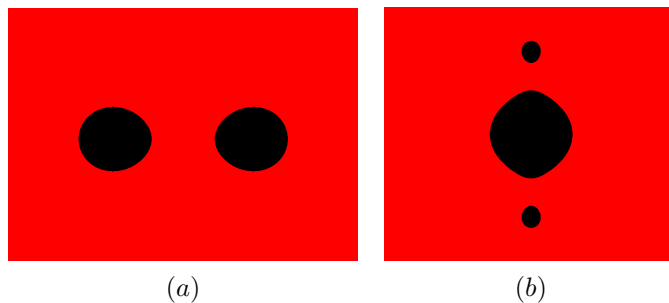


Figure 5: Componentes de los conjuntos llenos de Julia $\mathcal{K}(c_{n+1})$ y $\mathcal{K}(c_n)$ respectivamente del ejemplo 3.32.

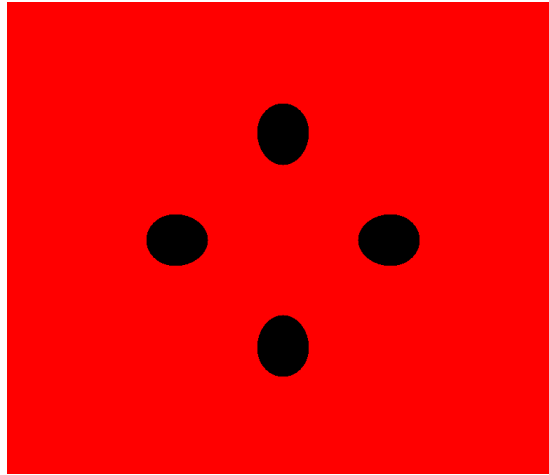


Figure 6: Componentes del conjunto lleno de Julia $\mathcal{K}(c_n)$ del ejemplo 3.33.

4. Conclusiones

La presente investigación se ha dedicado al estudio de la composición de funciones del tipo $f_n(z) = z^d + c_n$, lográndose cumplir con los objetivos planteados. Luego de ello se ha llegado a las siguientes conclusiones.

Es posible generalizar el teorema de clasificación de Bürger para polinomios del tipo $f_n(z) = z^d + c_n$ con $d \geq 2$.

La existencia del dominio invariante de ∞ , para funciones (f_n) que se encuentran en \mathcal{P}_I , es clave para la generalización de los resultados importantes. Por tal motivo la consideramos una condición necesaria para generalizar los teoremas de la teoría clásica de iteraciones

Referencias

- [1] A. Beardon. *Iteration of rational functions: Complex analytic dynamical systems*. Springer Science & Business Media, 2000.
- [2] R. Brück. *Connectedness and stability of Julia sets of the composition of polynomials of the form $z^2 + c_n$* . J. London Math Soc. **61**, 462-470, 1998.
- [3] R. Brück, M. Büger, and S. Reitz. *Random iterations of polynomials of the form $z^2 + c_n$: Connectedness of Julia sets*. Ergod. Th. & Dynam. Sys. **19**, 1221-1231, 1999.
- [4] M. Büger. *On the composition of polynomials of the form $z^2 + c_n$* . Ann. Math. **310**, 661-683, 1998.
- [5] M. Büger. *Self-similarity of Julia sets of the composition of polynomials*. Ergod. Th. & Dynam. Sys. **17**, 1289-1297, 1996.
- [6] S. Lang. *Complex Analysis*, Addison-Wesley, 1977.
- [7] J. Milnor. *Dynamics in One Complex Variable, Introductory Lectures*, Vieweg, 1999.
- [8] A. Poirier. *Iteración de polinomios y funciones racionales*. Fondo Editorial PUCP, 2016.

Abstract: We study the dynamics of sequences of polynomials in

$$\mathcal{P} = \{(f_n) : f_n(z) = z^d + c_n, \text{ with } (c_n) \text{ a sequence in } \mathbb{C}\}.$$

Given any sequence $(f_n) \in \mathcal{P}$, we write F_n for the composition $f_n \circ \dots \circ f_1$. We classify these sequences according to the asymptotic behavior of (F_n) and characterize such classification depending on the asymptotics of the sequence (c_n) . We generalize the results obtained by Büger and Brück [4] and we make a comparison between the classical iteration theory and

our approach. We look for which of these basic results are preserved for any type of sequence (f_n) and in the other cases we formulate the necessary conditions for several others to be preserved.

Keywords: Normal families, Fatou set, Julia set

Samir Sánchez
Departamento de Ciencias
Sección Matemáticas
Pontificia Universidad Católica del Perú
Lima, Perú
samir.sanchez@pucp.edu.pe

An elementary proof of Poincaré's last geometric theorem

Andrew Graven¹ and John Hubbard¹

January, 2021

Abstract

It is shown that the Poincaré-Birkhoff fixed point theorem may be proved by extending the geometric approach originally devised by Henri Poincaré himself, along with several results from elementary differential topology. Beginning with a sample application of the theorem, we proceed by systematically constructing and classifying a certain set of invariant curves and their critical points. This classification is then used to prove the correctness of a procedure which guarantees the existence of at least two fixed points for any twist map of the annulus admitting a positive integral invariant.

MSC(2010): 37C25, 37J45.

Keywords: Dynamics, differential topology, restricted three body problem.

¹ *Department of Mathematics, Cornell University.*

“J’ai démontré il y a longtemps déjà, l’existence des solutions périodiques du problème des trois corps; le résultat laissait cependant encore à désirer; car, si l’existence de chaque sorte de solution était établie pour les petites valeurs des masses, on ne voyait pas ce qui devait arriver pour des valeurs plus grandes, quelles étaient celles de ces solutions qui subsistaient et dans quel ordre elles disparaissaient. En réfléchissant à cette question, je me suis assuré que la réponse devait dépendre de l’exactitude ou de la fausseté d’un certain théorème de géométrie dont l’énoncé est très simple, du moins dans le cas du problème restreint et des problèmes de Dynamique où il n’y a que deux degrés de liberté.”¹

Henri Poincaré, 1912 [8]

1. Introduction

In this paper, we present an elementary proof of the Poincaré-Birkhoff fixed point theorem, otherwise known as “Poincaré’s last geometric theorem”. The theorem roughly states that any measure-preserving diffeomorphism of the annulus which twists the inner and outer boundaries in opposite directions has at least two fixed points. Poincaré originally conjectured this in his 1912 paper “Sur un Théorème de Géométrie” [8], in which he presents an elegant geometric proof in several special cases. However he did not succeed in proving the theorem in general.

It was not until after Poincaré’s death that George David Birkhoff published the first ostensibly complete proof in 1913 [2]. Unfortunately,

¹I demonstrated long ago the existence of periodic solutions to the three-body problem; however, the result still left something to be desired; for, if the existence of each class of solution was established for small values of the masses, it was not clear what happens for larger values: which of these solutions remained and in what order they disappeared. Reflecting on this question, I convince myself that the answer depends on the truth or untruth of a certain geometric theorem whose statement is very simple, at least in the case of the restricted problem and problems of dynamics in which there are only two degrees of freedom.

Birkhoff’s argument for the existence of the second fixed point relied on a fallacious application of the Poincaré theorem [7], known in its more general case as the Poincaré-Hopf index theorem (see Guillemin and Pollack [5, page 134]). In particular, the Poincaré theorem implies that the indices of the fixed points of f must sum to zero. Thus, if f has at least one fixed point, and this fixed point is of non-zero index, then there must exist at least one additional fixed point. However, this neglects the possibility of the fixed point having index zero. Birkhoff ultimately presented a correct proof of the general case of the theorem in his 1926 paper “An Extension of Poincaré’s Last Geometric Theorem” [3], taking an analytic approach distinct from that of Poincaré. We show that, by applying several elementary results in differential topology, one can prove the general case of the theorem, including the existence of the second fixed point, along the lines of Poincaré’s original argument.

2. Statement of the theorem

Let $A = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [0, 1]$ be the standard annulus, with x the 1-periodic coordinate and y the radial coordinate, with universal cover $\tilde{A} = \mathbb{R} \times [0, 1]$. Let $f : A \rightarrow A$ be a C^1 diffeomorphism mapping each boundary component to itself, and $\tilde{f} : \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$ be a lift to the universal cover.

Write $\tilde{f}(x, y) = (\tilde{f}_1(x, y), \tilde{f}_2(x, y))$. The map \tilde{f} is called a **twist map** if the two conditions, $\tilde{f}_1(x, 0) - \tilde{f}_1(0, 0) < x$ and $\tilde{f}_1(x, 1) - \tilde{f}_1(0, 1) > x$ are satisfied for all $x \in \mathbb{R}$. This is independent of the choice of lift and, as a consequence of periodicity, only needs to be checked for $x \in [0, 1]$. We also call f a **twist map** if \tilde{f} is a twist map.

In addition, we say f **admits a positive integral invariant** if there exists a function $d\mu : A \rightarrow \mathbb{R}$ such that $d\mu > 0$ for almost every $x \in A$ and the measure associated with $d\mu$, namely $\mu(U) = \int_U d\mu$, satisfies $\mu(U) = \mu(f(U))$ for all measurable $U \subseteq A$.

Theorem 2.1. *If $f : A \rightarrow A$ is a twist map admitting a positive integral invariant, then f has at least two fixed points.*

Corollary 2.2 (Poincaré’s Last Geometric Theorem [8]). *If f is an area preserving twist map, then f has at least two fixed points.* \square

3. Why we care

Poincaré was interested in this result in order to prove the existence of periodic motions in the restricted 3-body problem [1, 4, 8]. The example of the forced pendulum below is exactly this sort of problem, and we find that the result nicely fills in the KAM theorem picture, at least for systems with two degrees of freedom [6].

Example 3.1. The equation we will use for the forced pendulum is

$$x'' + \sin x = a \cos t.$$

This may not look like a Hamiltonian system, but it is if we add a variable s conjugate to t , leading to

$$\begin{aligned}
 H \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{y^2}{2} - \cos x - ax \cos t + s, \\
 x' = \frac{\partial H}{\partial y} &= y & t' = \frac{\partial H}{\partial s} &= 1 \\
 y' = -\frac{\partial H}{\partial x} &= -\sin x + a \cos t & s' = -\frac{\partial H}{\partial t} &= ax \sin t.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

The period map $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ is given by $P(x, y) = \varphi_{2\pi}(x, y)$, where φ_t is the time t flow of the vector field

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -\sin x + a \cos t \end{pmatrix}.$$

The function P is an area preserving map of the plane, either because the vector field has vanishing divergence, or because the (x, y) -plane is a Poincaré section for the Hamiltonian system (3.1).

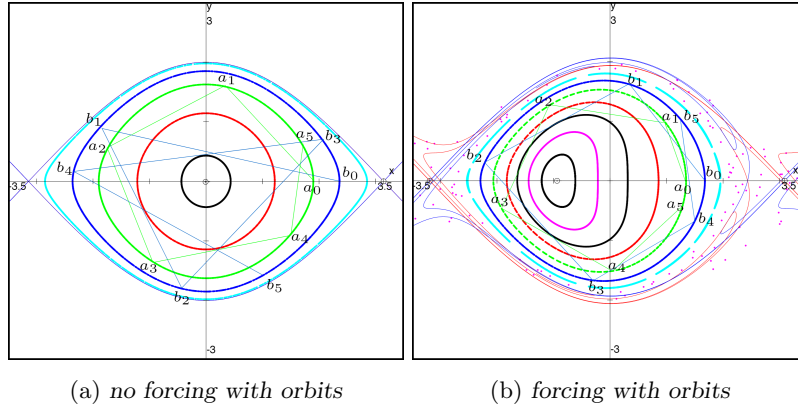


Figure 1: Figure 1(a) shows several orbits for the unforced equation with $a = 0$, together with the separatrices of the saddle corresponding to the upward unstable equilibrium of the pendulum. We have drawn the first six iterates of two points, connecting them by lines, and we have labeled the points a_0, \dots, a_5 and b_1, \dots, b_5 . Figure 1(b) is the corresponding picture for $a = .1$. The “equilibrium” is now a periodic orbit with period 2π , hence a fixed point of P . It is “surrounded” by invariant curves, really linear windings on 2-dimensional tori.

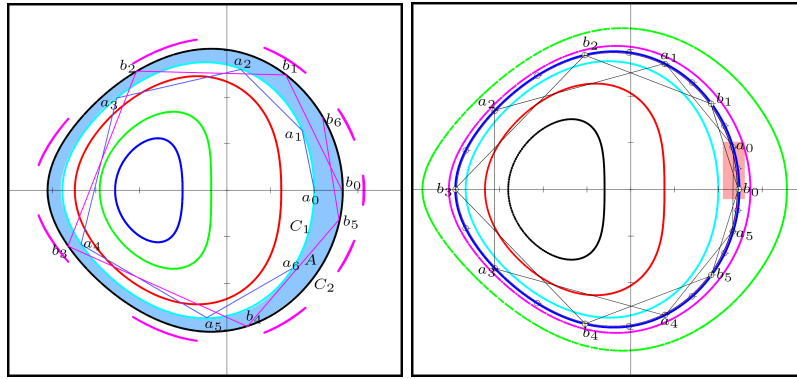
When $a = 0$, we can easily find a Lyapunov function for the reduced system. In fact, the standard Lyapunov function for a time independent Hamiltonian system is given by

$$V \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{y^2}{2} - \cos x.$$

In this case, the Lyapunov function V is constant with respect to the flow, so the orbits of P lie on level curves of V . Figure 1(a) shows various orbits, with emphasis on the first five iterates of two of the points. The orbits of points with irrational rotation number are dense in simple closed curves, so a randomly chosen orbit will almost surely be of this sort.

Figure 1(b) shows the (x, y) -plane when $a = .1$. The implicit func-

tion theorem says that fixed points of P corresponding to the stable equilibrium $\mathbf{0}$ of the pendulum must exist for a sufficiently small, as well as fixed points corresponding to the unstable equilibrium, and that these should still have stable and unstable manifolds. The number $a = .1$ is sufficiently small, and we see these equilibria, as well as the stable and unstable manifolds, which have become much more complicated since they now intersect transversally.



(a) The annulus A bounded by C_1 and C_2 (b) Two six-cycles of saddles and two six-cycles of centers

Figure 2: In Figure 2(a), the orbit of a_0 on C_1 indicates that its rotation number is a bit less than $1/6$. On the other hand, the orbit of b_0 on C_2 indicates that its rotation number is a bit more than $1/6$. Thus $P^{66} : A \rightarrow A$ is a twist-map. Figure 2(b) shows the cycles of period 6 found by Newton's method. There are two 6-cycles of saddles and two 6-cycles of centers. The saddles have separatrices, of course, and the KAM theorem guarantees that there are invariant cycles of curves around the centers.

The KAM theorem guarantees that close to the stable equilibrium for the unperturbed system, for rotation numbers sufficiently irrational

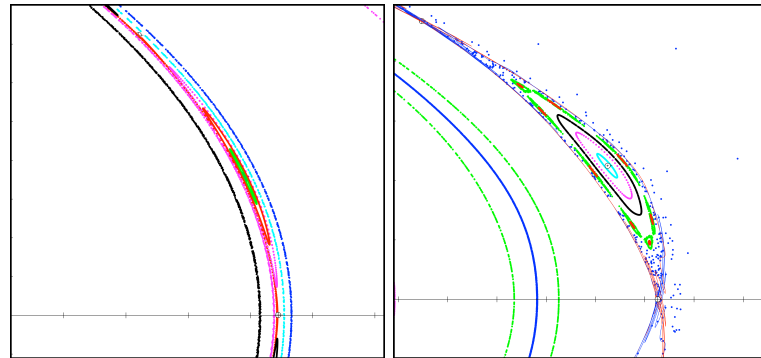
and close enough to the rotation number of the stable equilibrium, and for a small, orbits dense in a simple closed curve and with the same rotation number will exist for the perturbed system [6]. It is very hard to quantify the “sufficientlies” in KAM theorem, and the numbers one could get from the proof are presumably absurdly pessimistic.

In Figure 2, we will assume that the cyan curve C_1 passing through $a_0 = (1, 0)$ is the closure of the orbit of a_0 , and the black curve C_2 passing through the point $b_0 = (1.3, 0)$ is the closure of the orbit of b_0 ; the computer seems to indicate this is the case. We have drawn in the first seven points of the orbits of a_0 and b_0 . The orbits of these points indicate that the rotation number of $P : C_1 \rightarrow C_1$ is smaller than $1/6$, and that the rotation number of $P : C_2 \rightarrow C_2$ is greater than $1/6$.

Thus the region between C_1 and C_2 inclusive is an annulus, A , and $P^{o6} : A \rightarrow A$ is a twist map. Theorem 2.1 asserts that P^{o6} has at least two fixed points in A ; but P^{o6} is a 6th iterate, so there must be two periodic cycles of length 6 in A . We will look for them by Newton's method (for P^{o6} , itself a solution of a periodic differential equation!). The “band” corresponding to period 6 is sufficiently narrow that it is hard to see what is happening there. Figure 3 shows a blowup of both this region and of the similar island of period 3, which isn't so flattened and thus we can see more of its structure.

In Figure 3 we notice that the center of period 3 is the organizing center of a region rather like the large-scale region represented on the right in Figure 1. There are two saddles whose stable and unstable manifolds form a **homoclinic tangle**; the stable and unstable manifolds intersect transversally, and it follows that they accumulate on each other.

A bit of further reflection will show that the pattern they form is much more complicated than that: there are eight saddles forming two 4-cycles. Each has a stable and unstable manifold, and all of these accumulate on each other. There is a family of invariant curves (really 3-cycles of invariant curves) surrounding the period 3 center, but they also exist for sufficiently irrational rotation numbers, leaving regions corresponding to the rational numbers where we can apply Theorem



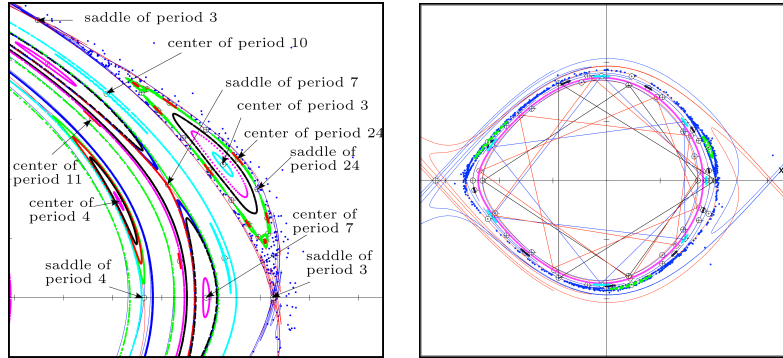
(a) The annulus A bounded by C_1 and C_2 (b) two six-cycles of saddles and two six-cycles of centers

Figure 3: Figure 3(a) shows a blowup of the region around one of the centers of period six. In Figure 3(b), there is a blowup of the region around a center of period 3, a bit further out in the picture. Here we can clearly see invariant curves surrounding the center (really cycles of three invariant curves), and islands. The pattern continues *ad infinitum*.

2.1, giving cycles of periods that are multiples of 3. In the picture, we see such a periodic cycle of period 24, surrounded by its own invariant curves. This pattern of “order”, *i.e.*, motion on invariant curves, technically called **quasi-periodic** motion, occurs with positive probability, but with dense subsets of “chaos” regions containing homoclinic tangles, but also further regions of order, and so forth, *ad infinitum*...

4. Proof of Theorem 2.1

We shall begin by presenting the geometric intuition for the proof. Then we will proceed to prove the existence of the first fixed point and, finally, extend that argument to show the existence of the second.



(a) The annulus A bounded by C_1 and C_2 (b) Two six-cycles of saddles and two six-cycles of centers

Figure 4: The left figure shows the orbits of period 3, with two satellite orbits of period 24, two orbits of period 4 (one of centers and one of saddles), two orbits of period 7 (also one of centers and one of saddles), and one orbit of period 10 and one of period 11. On the right, we see some explanation of the periods from above. The “Farey sum” of $1/3$ and $1/4$ is $2/7$, and thus the orbit of period 7 (blue lines in the picture) forms a $2/7$ star. The Farey sum of $1/3$ and $2/7$ is $3/10$ and, indeed, the orbit of of period 10 forms a $3/10$ star. Similarly for $1/4$ and $2/7$ giving a $3/11$ star.

4.1 Intuition for the proof

Let us begin by considering the fibres of $\alpha(x, y) = x$ in A , which correspond to radial lines. These fibres necessarily intersect their images as a consequence of the twist condition and the intermediate value theorem, as can be seen in Figure 5.

Next, isolate the intersections of these fibres with their images as in Figure 6(a). One can imagine that if we were to run this process for progressively denser sets of fibres of α , we might hope to obtain a set of smooth curves. These curves would be x -invariant in the sense

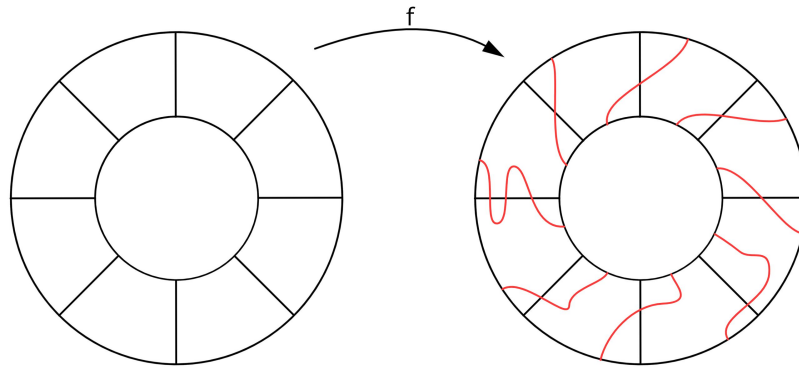
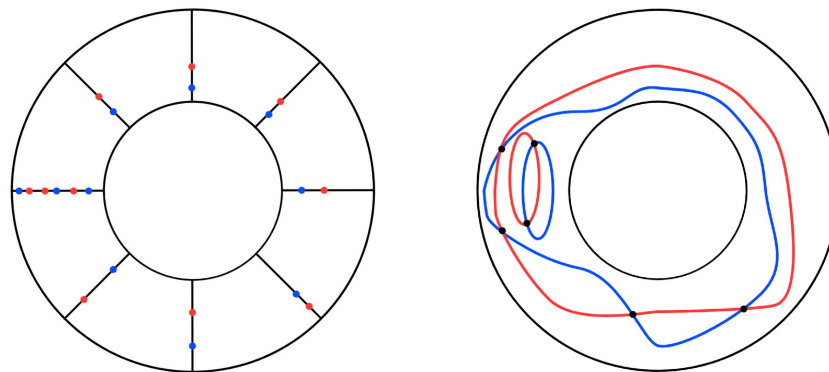


Figure 5: The fibres of α (black) and their images (red).

that they satisfy the equation $f_1(x, y) = x$ (i.e., the x -coordinate of the points in these curves is unchanged by f).



(a) Fibre intersection points (red) and their preimages (blue).

(b) Invariant curves (blue), their images (red), together with their intersections (black).

Figure 6: Construction of the x -invariant curves.

The intersection points in Figure 6(b) must exist because otherwise the region enclosed by some x -invariant curve would necessarily be mapped to a proper subset or superset of itself, which contradicts the assumption that f admits a positive integral invariant. Then one might conclude that these intersection points are fixed points. However, there are two claims here needing further justification:

1. The invariant curves exist.
2. The intersection points of invariant curves and their images constitute fixed points of f .

It turns out (1) is indeed provable, however (2) is not necessarily true. Thus, the proof will proceed as a variation of the intuitive approach outlined here.

4.2 Existence of invariant curves

Proving the existence of the hinted at x -invariant curves is nearly a direct application of the preimage theorem to the map

$$F(x, y) = \alpha(f(x, y)) - \alpha(x, y) = f_1(x, y) - x.$$

In which case $F^{-1}(0)$ would be composed of the desired set of invariant curves.

Theorem 4.1 (The Preimage Theorem [5], page 21). *Let $y \in Y$ be a regular value of a C^1 map $F : X \rightarrow Y$; so, in particular, $DF(x)$ is surjective for all x such that $F(x) = y$. Then $F^{-1}(y)$ is a submanifold of X of dimension $\dim(F^{-1}(y)) = \dim(X) - \dim(Y)$. \square*

However, it cannot be guaranteed that 0 is a regular value of our F , a necessary condition for the application of the preimage theorem. Thus, we need a slightly stronger result, the parametric transversality theorem.

Theorem 4.2 (The Parametric Transversality Theorem [5], page 68). *Consider a C^1 map $F : S \times X \rightarrow Y$ such that only X has boundary. Take Z to be a submanifold of Y , also without boundary. If F is transversal to Z , then almost every $F_s : X \rightarrow Y$ in the one parameter family $\{F_s\}_{s \in S}$ is transversal to Z . \square*

To apply Theorem 4.2 we parameterize α by an additional parameter, $\phi \in \mathbb{R}_+$, by $\alpha_\phi(x, y) = \phi \cdot x - y$. This naturally implies a redefinition of $F : \mathbb{R}_+ \times A \rightarrow \mathbb{R}$, given now by

$$F(\phi, x, y) = \alpha_\phi(f(x, y)) - \alpha_\phi(x, y).$$

When we wish ϕ to be held constant, we denote $F(\phi, x, y)$ by $F_\phi(x, y)$.

Now we need to show 0 is a regular value of F . In particular, we need to show that

$$DF = \left[f_1 - x, \phi \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} - 1 \right) - \frac{\partial f_2}{\partial x}, 1 - \frac{\partial f_2}{\partial y} + \phi \frac{\partial f_1}{\partial y} \right]$$

is onto for all $(x, y) \in F^{-1}(0)$. If DF weren't onto, then each of its entries must be equal to 0, which would imply $x = f_1$. This along with $F_\phi(x, y) = 0$ would tell us $f(x, y) = (x, y)$. That is, DF can only fail to be onto if (x, y) is a fixed point of f .

Thus, there are exactly two possibilities:

1. There is a set of ϕ of full measure such that F_ϕ is transverse to 0.
2. There is a fixed point of f in A .

After covering several additional preliminary results, we begin the central thrust of the proof of Theorem 2.1 in Section 5. There we show that (1) contradicts the existence of a positive integral invariant, thus establishing that f has at least one fixed point in A . Then in Section 6 we show that the assumption in (2) of a unique fixed point also leads to a contradiction. In fact, by a slight modification of the previous argument the assumption of a unique fixed point still contradicts the existence of a positive integral invariant.

If (1) holds, then, by the definition of transversality, there exists $\phi \in \mathbb{R}_+$ such that 0 is a regular value of F_ϕ . So, by the preimage theorem, $F_\phi^{-1}(0)$ is a compact 1-dimensional submanifold of A and thus contains a finite number of connected components (all closed curves, by the classification of compact 1-manifolds). Give each component the preimage orientation. This choice of orientation endows each component which wraps around the annulus with winding number ± 1 and all other components with winding number 0. Figure 7 provides an example of the sort of geometry we might expect here. When there is no risk of ambiguity, $F_\phi^{-1}(0)$ is referred to as \mathcal{I}_ϕ or simply as \mathcal{I} .

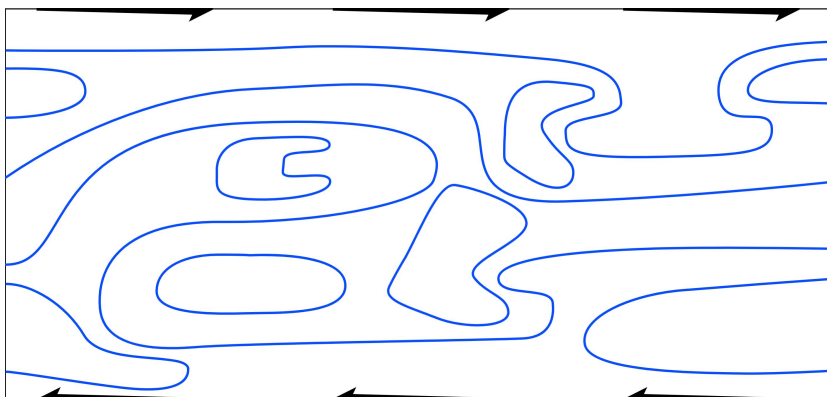


Figure 7: A possible instance of \mathcal{I} , with nine components, three of which have non-zero winding number. The arrows denote the twisting of the inner and outer boundaries in opposite directions. Throughout the paper, it will be standard to represent the annulus by the 1-periodic strip, as shown here.

4.3 A modification of f

The parameterization of α with respect to ϕ , necessary to apply Theorem 4.2 and the preimage theorem, complicates things slightly by endowing

$\alpha_\phi(x, y) = \phi \cdot x - y$ with slanted fibres in comparison to the straight fibres of the original $\alpha(x, y) = x$. So, to simplify the analysis, we conjugate the system by the linear transformation

$$T(x, y) = \left(x - \frac{y}{\phi}, y \right)$$

with inverse

$$T^{-1}(x, y) = \left(x + \frac{y}{\phi}, y \right).$$

In these coordinates, the fibres of α are straight, so f translates \mathcal{I} vertically (viewing A as the 1-periodic strip). Moreover, conjugation by T is simply a change of coordinates, so the hypotheses of the theorem remain satisfied.

4.4 Components with winding number ± 1 within \mathcal{I}

Let $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ be a parameterization of a simple closed curve. Then the **winding number** of γ about $z \in \mathbb{R}^2$ is given by

$$W(\gamma, z) = \deg \left(\frac{\gamma(x) - z}{|\gamma(x) - z|} \right)$$

where $\deg(g)$ is the topological degree of g .

Lemma 4.3 (An integral formula for the winding number [5]). *The winding number $W(\gamma) = W(\gamma, 0)$ of a curve γ about the origin can be computed as*

$$W(\gamma) = \oint_{\gamma} d\theta,$$

where $\theta(\vec{x})$ is the “argument” or “angle” of \vec{x} . In Cartesian coordinates for example we have $\theta(x, y) = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$. □

Lemma 4.4. *The winding number of \mathcal{I} is equal to 1. In other words, we have $W(\mathcal{I}) = 1$.*

Proof. Let γ be a simple curve in A transversal to \mathcal{I} which runs from one boundary to the other as $\gamma(0) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{1\}$ and $\gamma(1) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{0\}$. Then by the twist property, we have $F(\gamma(0)) > 0 > F(\gamma(1))$. Thus, $F \circ \gamma$ changes sign an odd number of times on $[0, 1]$, implying it has an odd number of zeros. Therefore $\gamma([0, 1])$ intersects $\partial A \cup \mathcal{I}$ an odd number of times with alternating orientation, so $W(\partial A \cup \mathcal{I}) = 1$. Then, by Stokes' theorem, we obtain

$$W(\partial A) = \oint_{\partial A} d\theta = \int_A d^2\theta = \int_A 0 = 0,$$

which immediately implies

$$1 = W(\partial A \cup \mathcal{I}) = W(\partial A) + W(\mathcal{I}) = W(\mathcal{I}).$$

□

5. The existence of a fixed point

At this point, one may like to make an argument along the following lines. Take an $S \subseteq \mathcal{I}$ satisfying $W(S) = 0$. Then S intersects $f(S)$ at least twice because otherwise one set would bound the other, violating the existence of a positive integral invariant. These intersections are fixed points, so we are done.

Unfortunately, this argument fails on its last line. If S takes on multiple values of y for the same value of x , it is possible for the intersection points of S and $f(S)$ to occur at different y values for the same x . Moreover, for components with winding number 0, intersections cannot be guaranteed.

Using Figure 8 as a starting point, we will show that any such “counterexample” to the theorem admits a curve which violates the existence of a positive integral invariant. Our approach will need to be general enough to handle complicated geometries, like that in Figure 7. Thus, to simplify analysis, we make the following observation which will constrain the range of possibilities.

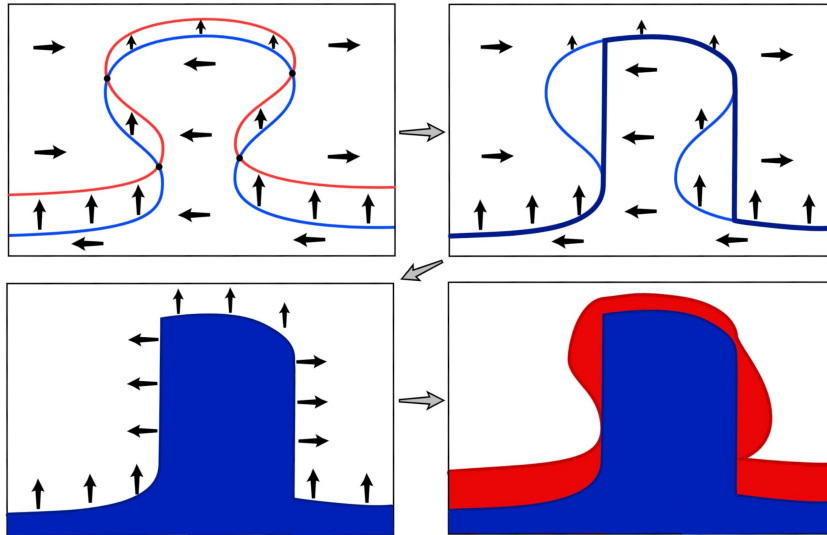


Figure 8: An element of \mathcal{I} intersecting its image does not seem to guarantee the intersections are fixed points. In Panel 1 there are four intersection points, but clearly none of these are fixed points. To show this cannot happen, we construct the dark blue curve (Panel 2) which maps outside itself, thus contradicting the existence of a positive integral invariant.

Take $S \subseteq \mathcal{I}$, and consider the following two cases:

- a. For all $(x, y) \in S$, we have $f_2(x, y) > y$.
- b. For all $(x, y) \in S$, we have $f_2(x, y) < y$.

For neither of these conditions to hold, exactly one of the following statements must be true.

1. There exists $(x_1, y_1) \in S$ such that $f_2(x_1, y_1) > y_1$ and $(x_2, y_2) \in S$ such that $f_2(x_2, y_2) < y_2$.

2. Either for all $(x, y) \in S$ we have $f_2(x, y) \geq y$ or for all $(x, y) \in S$ we have $f_2(x, y) \leq y$ (with equality attained in each case).

In the first case, the intermediate value theorem implies there exist two points satisfying $f_2(x, y) = y$. In addition, $(x, y) \in S$ and $f(x, y)$ are in the same fibre of α , which implies $f(x, y) = (x, y)$. Hence, each of these points are fixed points of f . In the second case, there is a fixed point where the inequality is sharp. Therefore we may assume either $f_2(x, y) > y$ or $f_2(x, y) < y$ on all of S .

Thus, it is sufficient to show there exists at least one component $S \subseteq \mathcal{I}$ neither mapping monotonically upwards nor downwards. To accomplish this, we assume for the sake of contradiction that each component of \mathcal{I} maps monotonically. Then we show that, under this assumption, there exists a closed path $C \subset A$ which maps outside itself or inside itself, thus violating the existence of a positive integral invariant.

Without loss of generality, from now on we assume that the outer boundary twists clockwise (right) and the inner boundary counterclockwise (left).

5.1 Construction of the path

Note that if any component $S \subseteq \mathcal{I}$ with $W(S) = \pm 1$ is free of non-degenerate critical points (see definition below), then the region bounded by S violates the existence of a positive integral invariant. Thus, for the remainder of this section, we will operate under the assumption that such non-degenerate critical points exist for each $S \subseteq \mathcal{I}$ (such non-degenerate critical points trivially exist for S with $W(S) = 0$). Here, we view A as the 1-periodic strip $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times [0, 1]$, as in Figure 7, rather than the geometric annulus, as in Figure 5. Also let $\pi(x, y) = x$. As usual we define the ϵ -neighborhood of a set $X \subseteq A$ as $\{(x, y) \in A : \inf_{(x', y') \in X} |(x, y) - (x', y')| < \epsilon\}$.

- A point $(x_0, y_0) \in S \subseteq \mathcal{I}$ is a **critical point** if $\frac{\partial F_\phi}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ (here

S is the component of \mathcal{I} containing (x_0, y_0)). In other words, the tangent to S at (x_0, y_0) is vertical.

- A critical point $(x_0, y_0) \in S \subseteq \mathcal{I}$ is **non-degenerate** if there exists $\epsilon > 0$ such that the ϵ -neighborhood U of $S \cap (\{x_0\} \times (0, 1))$ satisfies $\pi(U \cap S) \leq x_0$ or $\pi(U \cap S) \geq x_0$. Intuitively, (x_0, y_0) is non-degenerate if the vertical line $x_0 \times (0, 1)$ does not locally cross S .
- A non-degenerate critical point is **left-facing** (respectively, **right-facing**) if its tangent is locally to its left (respectively, right). Each of the non-degenerate critical points in Figure 9 are left-facing.
- The **outer flow** at a non-degenerate critical point is the direction of the x -component of the vector field $f(x, y) - (x, y)$ on the vertical tangent near said critical point.




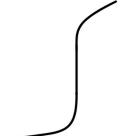
Non-Degenerate	Degenerate
	
	

Figure 9: Non-degenerate and degenerate critical points. Intuitively, non-degenerate critical points are those which eventually bend back in the same direction on both sides of the critical point.

What follows is a set of conventions which will be used to represent and algebraically manipulate the properties of the S_i and the non-degenerate critical points.

- Enumerate the n connected components of \mathcal{I} as $\{S_i\}_{i=1}^n$.
- For each S_i , define the following:
 - u_i is the (constant) sign of $f_2(x, y) - y$ in S_i , denoting the vertical translation direction of S_i under f .
 - n_i is the number of non-degenerate critical points of S_i .
 - $\{c_{i,k}\}_{k=1}^{n_i}$ is the set of non-degenerate critical points of S_i , each equipped with a value:
 - * $c_{i,k} = +1$ if the non-degenerate critical point is right-facing,
 - * $c_{i,k} = -1$ if the non-degenerate critical point is left-facing.
 - For $c_{i,k}$, define a corresponding $f_{i,k}$, denoting the direction of the outer flow at $c_{i,k}$:
 - * $f_{i,k} = +1$ if the outer flow at $c_{i,k}$ is to the right,
 - * $f_{i,k} = -1$ if the outer flow at $c_{i,k}$ is to the left.
 - For $c_{i,k}$, define $T(c_{i,k}) = u_i c_{i,k}$, called the **“type”** of $c_{i,k}$.

Now we can begin constructing the closed curve C . For each non-degenerate critical point $c_{i,k}$ of type $+1$ (that is, with $T(c_{i,k}) = u_i c_{i,k} = 1$) we define a directed path departing from it as follows.

1. Begin traveling vertically in the $v = -f_{i,k}$ direction (*i.e.*, $v = +1$ means up and $v = -1$ means down).
2. Once another component $S_{i'}$ of \mathcal{I} is intersected, travel along it in the $t = -u_{i'} v f_{i,k}$ direction (*i.e.*, right if $t = +1$ and left if $t = -1$) until another non-degenerate critical point $c_{i',k'}$ is reached.

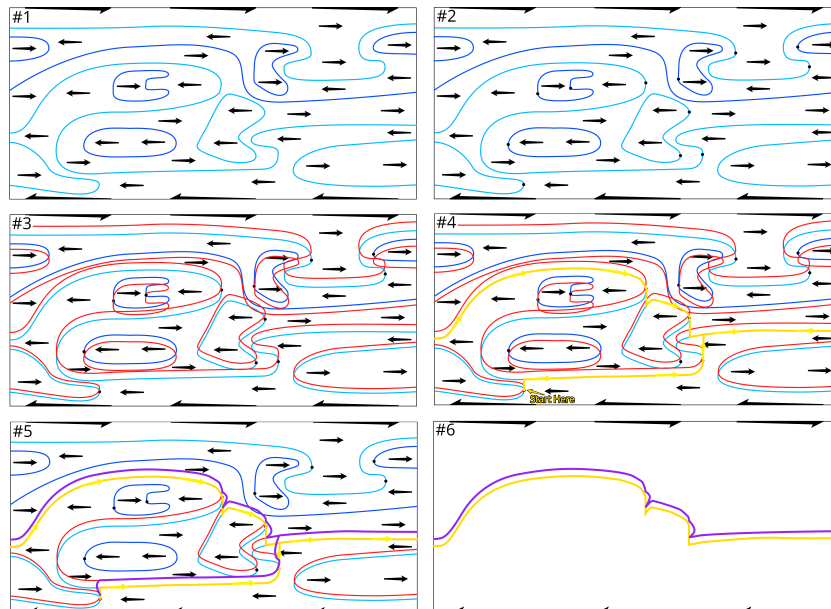


Figure 10: A sample application of Lemmas 5.1 and 5.2. Panel 1 depicts the set of invariant curves from Figure 7. The dark blue curves map downwards and the light blue curves upwards. In Panel 2 the type +1 non-degenerate critical points are shown in black. In Panel 3 the images (red) of the invariant curves are shown. In Panel 4 we generate a path (yellow) as described in Lemma 5.1. In Panel 5 we show the image of the generated path (purple). Finally, Panel 6 isolates the relevant portion of the generated path (yellow) and its image (purple). As we would hope, the path is enclosed by its image, implying a violation of the existence of a positive integral invariant.

Lemma 5.1. *The path from any $c_{i,k}$ with type $T(c_{i,k}) = +1$ exists. In fact, (1) the vertical part of the path intersects another component and never hits the boundary of A , and (2) the path terminates at a critical point $c_{i',k'}$ that satisfies $T(c_{i',k'}) = +1$.*

Adjacent non-degenerate critical points alternate in direction. Thus, because each component of \mathcal{I} has at least one non-degenerate critical point, we can conclude that each component has at least one non-degenerate critical point of type +1. Then, since \mathcal{I} is a compact 1-manifold, Lemma 5.1 directly implies there is a finite and non-zero number of non-degenerate critical points of type +1.

Lemma 5.2. *The collection of directed paths from Lemma 5.1 contains a closed path $C \subset A$. Moreover, $f(C)$ never crosses over C , and thus violates the existence of a positive integral invariant.*

Note that this is not the same as requiring that C and $f(C)$ have an empty intersection. We only require that $f(C)$ lies entirely within the closure of one of the two connected components of $A \setminus C$.

The remainder of this section is focused on the proof of Lemma 5.1 and Lemma 5.2.

5.2 Proof of Lemma 5.1

Let $c_{i,k}$ be an arbitrary non-degenerate critical point on $S_i \subseteq A$ with $T(c_{i,k}) = +1$. The proof of Lemma 5.1 can be reduced to three facts.

1. The vertical path taken from $c_{i,k}$ (as defined above Lemma 5.1) intersects another component $S_{i'} \subseteq \mathcal{I}$ and, in particular, does not intersect ∂A .
2. Once $S_{i'}$ is hit, the continuation along $S_{i'}$ eventually reaches another non-degenerate critical point $c_{i',k'}$.
3. The terminal non-degenerate critical point $c_{i',k'}$ is of type +1.

Part 1

Assume for the sake of contradiction that the vertical portion of the path from some $c_{i,k}$ of type +1 intersects the boundary. Then the component S_i containing $c_{i,k}$ is either adjacent to the upper boundary or the lower

boundary. If S_i is adjacent to the lower boundary, then, because the lower boundary maps to the left, we have $f_{i,k} = -1$, which implies $v = -f_{i,k} = 1$. Therefore, the vertical portion of the path from $c_{i,k}$ cannot intersect the lower boundary. The analogous argument also holds for S_i adjacent to the upper boundary, so this is a contradiction. Thus the vertical taken from $c_{i,k}$ cannot intersect the boundary, and instead intersects another component of \mathcal{I} .

Part 2

Because \mathcal{I} is compact, each component has finite length. Moreover, we asserted earlier that each component has at least two non-degenerate critical points. Therefore, traveling along any component for long enough, we eventually reach a non-degenerate critical point.

Part 3

Recall the rules for generating the path from $c_{i,k}$ to $c_{i',k'}$: The direction of the vertical is $v = -f_{i,k}$ and the direction along $S_{i'}$ is $t = -u_{i'}v f_{i,k}$. Combining these equations gives us the relation $t = -u_{i'}(-f_{i,k})f_{i,k} = u_{i'}$. We also have $c_{i',k'} = t$ because if we travel along a component to the right (respectively, left), then the non-degenerate critical point we intersect must be right-facing (respectively, left-facing). This allows us to directly compute the type of the terminal point of the path: $T(c_{i',k'}) = c_{i',k'}u_{i'} = u_{i'}^2 = +1$.

5.3 Proof of Lemma 5.2

To prove Lemma 5.2, it will be sufficient to show that the path does not cross over its image.

Such a loop exists

By Lemma 5.1, the path from any non-degenerate critical point of type $+1$ terminates at another of type $+1$. Then, recalling there are finitely

many non-degenerate critical points in \mathcal{I} , any sequence of paths starting on a type +1 point must eventually repeat itself, thus forming a closed loop C .

The loop does not cross over its image

We have, by supposition, that each component of \mathcal{I} maps uniformly either up or down. Thus, the only possible trouble points are

- a) at non-degenerate critical points transitioning to the vertical portion of a path,
- b) on the vertical portions themselves, or
- c) at the intersection of the vertical part of a path with another component.

(a) No crossovers when leaving a non-degenerate critical point

There are eight ways a type +1 non-degenerate critical point may be approached and departed from. The cases are listed below.

(1) Direction of Vertical From Critical Point					
Case Number	Component Map Direction	Critical Point Direction	Outer Flow Direction	Approach Direction	Vertical Travel Direction
1	Up	Right	Right	Up	Down
2	Up	Right	Right	Down	Down
3	Up	Right	Left	Up	Up
4	Up	Right	Left	Down	Up
5	Down	Left	Right	Up	Down
6	Down	Left	Right	Down	Down
7	Down	Left	Left	Up	Up
8	Down	Left	Left	Down	Up

The easiest way to check these cases is pictorially, as in Figure 11 below.

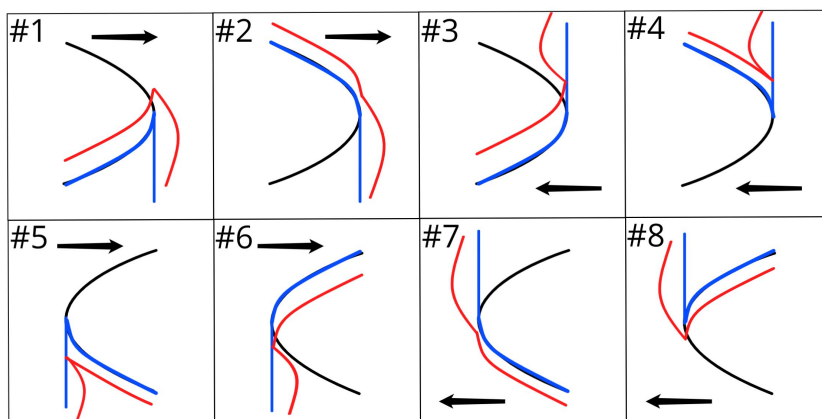


Figure 11: Casework for the path when leaving a non-degenerate critical point, with the path (blue), its image (red), and the path S_i (black). The arrow in each frame denotes the direction of the outer flow.

The path maps monotonically either up or down when restricted to any given component of \mathcal{I} , and the outer flow direction determines to which side of itself the vertical portion of the path is mapped. As we can see, in each of these cases the image of the path does not cross over (but may intersect) the path.

(b) No crossovers on the vertical portions themselves

In this case, each vertical portion of the path is confined to a region bound by $\partial A \cup \mathcal{I}$. Moreover, \mathcal{I} is the set of points for which the horizontal component $f_1(x) - x$ of the flow $f(x, y) - (x, y)$ changes direction, which implies the horizontal component of the flow has constant direction in each of these regions. Therefore, each vertical component of the path is mapped strictly either to its left or its right. So, the image of these verticals does not intersect the original vertical, except perhaps at its endpoints, and thus does not cross it.

(c) No problems at the intersection of a vertical path with another component

As in Part (a), we show this by casework, tabulating the set of possible situations.

Direction of Travel From Vertical Intersection				
Case Number	Component Map Direction	Vertical Travel Direction	Outer Flow Direction	Travel Direction
1	Up	Up	Right	Left
2	Up	Up	Left	Right
3	Up	Down	Right	Right
4	Up	Down	Left	Left
5	Down	Up	Right	Right
6	Down	Up	Left	Left
7	Down	Down	Right	Left
8	Down	Down	Left	Right

These cases are worked out pictorially in Figure 12.

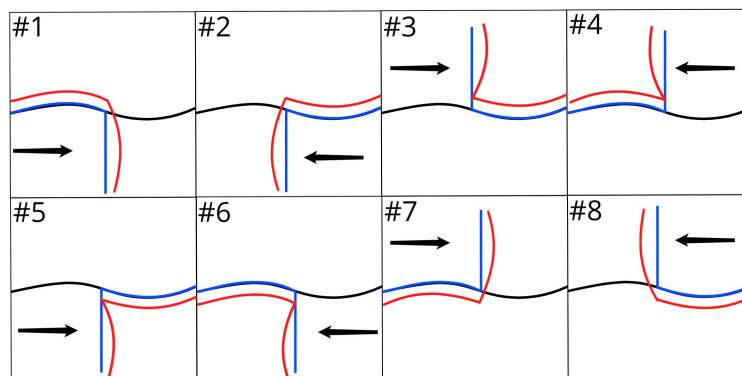


Figure 12: Casework for component intersection. The elements represented by the colors are the same as in Figure 11.

The portion of the path on the component maps monotonically up

or down, and the local flow direction determines which side of the vertical the image of the vertical under f is mapped to. And as we can see, in each of these cases, the image of the path does not cross over the original, just as in the previous section.

Therefore $f(C)$ never locally crosses over C . Can $f(C)$ non-locally cross over C ? No, because in this case f would not be a diffeomorphism since $f(C)$ would either cross over itself or reverse orientation. Hence, the region enclosed by C violates the existence of a positive integral invariant under f , producing a contradiction and proving the existence of at least one fixed point of $f : A \rightarrow A$.

6. There cannot be only one fixed point

The proof that there is a second fixed point is more delicate. The approach will be very similar to that given above: we assume for the sake of contradiction that there is only one fixed point, and use this to produce a contradiction to the existence of a positive integral invariant. However, several modifications of the argument are needed to account for the fact that the existence of a fixed point prevents 0 from necessarily being a regular value of the same F as before.

Let f be as in the statement of Theorem 2.1 and having, for the sake of contradiction, a single fixed point x^* . Take a closed ball $B_\epsilon(x^*)$ about x^* , with ϵ sufficiently small so as not to intersect either of the boundaries. Next, apply the same construction as in Subsection 4.2, except modify the family of functions $F_\phi : A \rightarrow \mathbb{R}$ to $F_{\phi,\epsilon} : A \setminus B_\epsilon(x^*) \rightarrow \mathbb{R}$, so

$$F_{\phi,\epsilon} = F_\phi|_{A \setminus B_\epsilon(x^*)}.$$

Now $F_{\phi,\epsilon}$ satisfies Theorem 4.2 for all $\epsilon > 0$ because $A \setminus B_\epsilon(x^*)$ is fixed point-free. Thus each connected component of $F_{\phi,\epsilon}^{-1}(0)$ is a 1-submanifold of $A \setminus B_\epsilon(x^*)$. Moreover, as we take ϵ closer to 0, $F_{\phi,\epsilon}^{-1}(0)$ is extended towards x^* . At this point, the scenario may look like that in Figure 13.

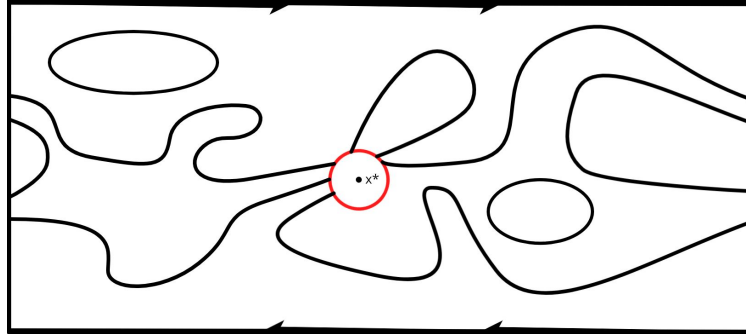


Figure 13: The set of invariant curves of $F_{\phi,\epsilon}^{-1}(0)$: the invariant curves (black), the fixed point x^* , and $\partial B_\epsilon(x^*)$ (red).

From here, we complete each of the components intersecting $\partial B_\epsilon(x^*)$ so that we can apply Lemmas 5.1 and 5.2. To do so, we append straight line paths from each component to itself. For example, a completion of the invariant curves in Figure 13 is shown in Figure 14.

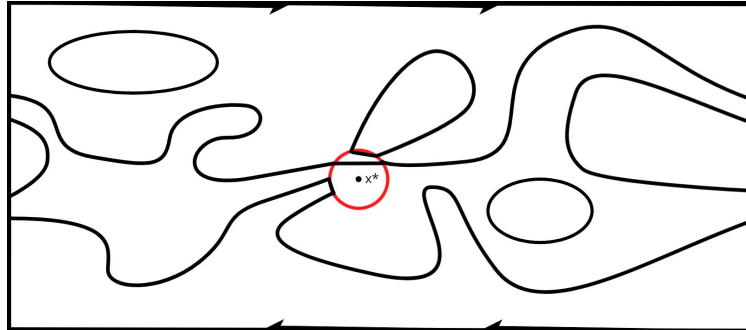


Figure 14: The completion of the set of invariant curves: the completed invariant curves (black), the fixed point x^* , and $\partial B_\epsilon(x^*)$ (red).

For $\epsilon > 0$, each component intersects $\partial B_\epsilon(x^*)$ either twice or not at all because of $\partial F_{\phi,\epsilon}^{-1}(0) = \emptyset$. Thus each component is either a closed

curve or has the end points of its closure on $\partial B_\epsilon(x^*)$.

Moreover, for $\epsilon > 0$ sufficiently small, there exists some component S of $F_{\phi,\epsilon}^{-1}(0)$ with winding number different from 0 which either does not intersect $\partial B_\epsilon(x^*)$, intersects $\partial B_\epsilon(x^*)$ once tangentially, or intersects $\partial B_\epsilon(x^*)$ twice, with the second time being only after winding around A once. This follows immediately from the argument given in Section 4.4.

It is important to note that, by appending these line segments to each component, they are very likely now only C^0 , rather than C^1 ; however, this can clearly only be the case at the (at most) finitely many points belonging to $\overline{F_{\phi,\epsilon}^{-1}(0)} \cap \partial B_\epsilon(x^*)$.

Under this construction, Lemma 5.1 still holds and Lemma 5.2 holds outside $B_\epsilon(x^*)$. Lemma 5.1 almost works straight out of the box, with almost all of the definitions applying the same as before. The only place where this fact isn't necessarily clear is in the definition of critical points and non-degenerate critical points. It turns out this definition, too, works as originally stated: "We say that a point on a component is a critical point if it admits a vertical tangent line". Just to provide additional clarity here, some typical examples are exhibited in Figure 15 below. It is also easy to verify that Lemma 5.2 continues to hold outside of $B_\epsilon(x^*)$.

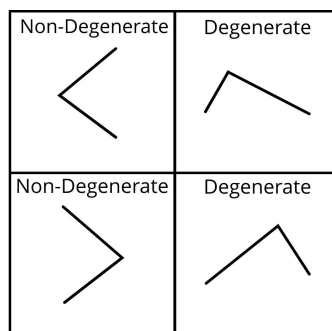


Figure 15: Examples of C^0 degenerate and non-degenerate critical points.

Now all that is left to show is that there exists an ϵ sufficiently small that the measure of the region enclosed by the path C is different from the area enclosed by $f(C)$. In particular, the amount of error introduced by the failure of Lemma 5.2 within $B_\epsilon(x^*)$ is strictly less than the difference in area enclosed by C and $f(C)$ outside of $B_\epsilon(x^*)$.

To accomplish this, we first prove the existence of a lower bound K (independent of ϵ) on the area differential between C and $f(C)$ outside $B_\epsilon(x^*)$. Then we show that the maximum possible error introduced within $B_\epsilon(x^*)$ tends to 0 as $\epsilon \rightarrow 0$. This would imply we can pick ϵ sufficiently small so that the path is guaranteed to map to a curve which contains strictly more or less area. We show these two facts in the remainder of the paper.

6.1 There exists of a lower bound $K > 0$

We prove the existence of this lower bound in two steps: (1) We show that the closed loop from Lemma 5.2 has non-zero winding number, and (2) we use this fact to construct such a lower bound.

6.1.1 The path has non-zero winding number

Suppose for the sake of contradiction that the path generated by Lemma 5.2 were to have winding number 0. Then the path may be lifted homeomorphically into $\mathbb{R} \times [0, 1]$. Thus, there must be some region R (a connected component of $A \setminus \mathcal{I}$) in which the path takes at least two verticals. Fix either the leftmost or rightmost of these verticals. Since there are finitely many critical points, there must exist another vertical of the path in R , which is horizontally closest to the leftmost (respectively, rightmost) vertical. Then, by construction, R is composed of points all mapping in the same horizontal direction under f . Without loss of generality, suppose this direction were to the right and let C be the path containing those verticals. There are exactly four distinct cases in which the two verticals can be connected. These are shown in Figure 16.

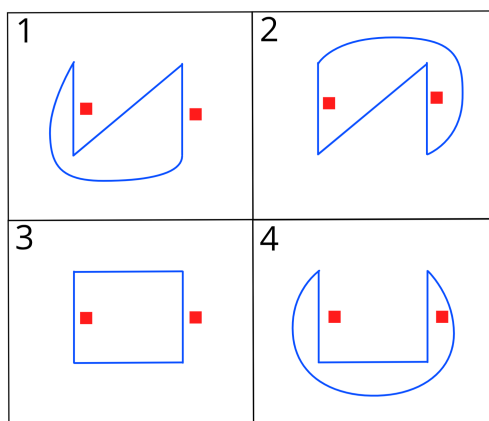


Figure 16: All cases in which C (blue) has winding number 0. The boxes (red) indicate the side to which f maps each adjacent vertical.

We can immediately rule out Cases 3 and 4 because they require that one of the verticals be upward, while the other downward. This is impossible because, by construction, all verticals in any given region necessarily go in the same direction ($v = -f_{i,k}$). On the other hand, in Cases 1 and 2 the diagonal implies the existence of some intermediate vertical in the aforementioned region. However, by assumption, no such intermediate vertical exists. Therefore, Cases 1 and 2 may be ruled out as well, and we can conclude that the path from Lemma 5.2 has non-zero winding number.

6.1.2 The lower bound K

Using the fact that the path from Lemma 5.2 has non-zero winding number, we obtain the constant K as follows: (1) Find a nonempty subinterval of values of x , say $J = [x_{\min}, x_{\max}]$, such that $J \times (0, 1) \subset A$ contains no non-degenerate critical points, and does not intersect $B_\epsilon(x^*)$ (such a subinterval must exist because there are only finitely many critical points), (2) consider the area contained between each connected com-

ponent of $\mathcal{I} \cap (J \times (0, 1))$ and their respective images, (3) because the path has non-zero winding number, we know it must pass through at least one of the components above the subinterval J , and (4) therefore the least of these areas constitutes such a lower bound $K > 0$.

This constant is an effective lower bound on the area enclosed between the path and its image, outside of $B_\epsilon(x^*)$. Now all that is left is to take ϵ sufficiently small that the lower bound on the area deviation inside $B_\epsilon(x^*)$ is less than K , and we are done.

6.2 The error arising within $B_\epsilon(x^*)$ tends to 0

By the compactness of A and the continuity of Df , the extreme value theorem guarantees there exists $M < \infty$ such that $M \leq |\det(Df(x))|$ for all $x \in A$.

Thus, the area deviation resulting from errors within $B_\epsilon(x^*)$ is bounded by $\mu(B_\epsilon(x^*)) \sup_{x \in B_\epsilon(x^*)} |\det(Df)|$, which is bounded from above by $\mu(B_\epsilon(x^*))M$. Moreover, we have $\mu(B_\epsilon(x^*)) \rightarrow 0$ as $\epsilon \rightarrow 0$, so we can choose $\epsilon > 0$ sufficiently small in order to get

$$\mu(B_\epsilon(x^*)) < \frac{K}{M},$$

which implies

$$\mu(B_\epsilon(x^*))M < K.$$

This contradicts the existence of an integral invariant, so we can conclude f has at least two fixed points.

References

- [1] Bramham Barney, *Poincaré's Last Geometric Theorem: A 21st Century Proof*, Institut Henri Poincaré, 2013.
- [2] George D. Birkhoff, *Proof of Poincaré's Geometric Theorem*, Transactions of the American Mathematical Society **14** (1913), no. 1, 14–22.

- [3] George D. Birkhoff, *An Extension of Poincaré's Last Geometric Theorem*, Acta Math. **47** (1926), no. 4, 297–311.
- [4] Christophe Golé and Glen R. Hall, *Poincaré's Proof of Poincaré's Last Geometric Theorem*, Twist Mappings and Their Applications **44** (1992), 135–152.
- [5] Victor Guillemin and Alan Pollack, *Differential Topology*, AMS Chelsea Publishing, 1974.
- [6] John Hubbard and Yulij Ilyashenko, *A Proof of Kolmogorov's Theorem*, Discrete and Continuous Dynamical Systems **4** (2003), no. 4, 1–20.
- [7] Encyclopedia of Mathematics, *Poincaré Theorem*, http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Poincar%C3%A9_theorem&oldid=48210m.
- [8] Henri Poincaré, *Sur un Théorème de Géométrie*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **33** (1912), 375–407.

Resumen: Mostramos que el teorema de punto fijo de Poincaré-Birkhoff puede ser probado vía una extensión del acercamiento geométrico originalmente dividido por el propio Poincaré, junto con algunos resultados elementales de topología diferencial. Tras un ejemplo de aplicación del teorema, procedemos a sistemáticamente construir y clasificar cierto conjunto de curvas invariantes y sus puntos críticos. Esta clasificación es luego utilizada para probar la corrección de un procedimiento que garantiza la existencia de por lo menos dos puntos fijos de cualquier función *twist* de un anillo siempre que admita una integral invariante positiva.

Palabras clave: Dinámica, topología diferencial, problema restringido de los tres cuerpos.

An elementary proof of Poincaré's last geometric theorem

Andrew Graven
Department of Mathematics, Cornell University
301 Tower Rd, Ithaca, NY 14853
United States
ajg362@cornell.edu, andrew@graven.com

John Hubbard
Department of Mathematics, Cornell University
301 Tower Rd, Ithaca, NY 14853
United States
jhh8@cornell.edu

INFORMACIÓN PARA LOS AUTORES

PRO MATHEMATICA publica artículos que presenten resultados originales de investigación, así como trabajos inéditos de divulgación, de todas las áreas matemáticas. Artículos de otras ciencias también pueden ser aceptados si presentan resultados matemáticos interesantes.

Procedimiento editorial. Los autores deben enviar sus manuscritos originales vía email en formato PDF. Cuando un artículo tenga más de un autor, se debe indicar cuál de ellos recibirá la correspondencia. Todos los artículos recibidos en PRO MATHEMATICA son sometidos a arbitraje. Si una contribución es aceptada, se les pedirá a los autores que envíen una copia electrónica del manuscrito en formato \TeX , preferiblemente en \LaTeX . En tal caso, el manuscrito se editará de acuerdo al estilo de la revista, y se les pedirá a los autores que lean cuidadosamente las pruebas de imprenta. Una vez que el artículo haya sido publicado, el autor correspondiente recibirá una copia electrónica del trabajo.

Preparación del manuscrito. El manuscrito debe estar escrito en castellano o en inglés, y debe incluir un título completo y un título abreviado, un resumen, una lista de palabras clave, y los códigos del sistema de clasificación «Mathematics Subject Classification» más reciente (actualmente MSC 2020). Se ruega a los autores proporcionar su resumen en ambos idiomas: castellano e inglés. Las referencias bibliográficas deben incluir solamente trabajos citados en el texto, y se deben enumerar en orden alfabético siguiendo los criterios aplicados en las publicaciones de la AMS (www.ams.org/journals). Si el artículo incluyera gráficos de cualquier tipo, éstos deberán ser incluidos en formato EPS, JPG o PDF. Las figuras y las tablas se deben identificar mediante cifras arábigas o letras entre paréntesis. Las leyendas deben ser breves y claras. Cada autor deberá mencionar su(s) filiación(es) institucional(es) o centro de trabajo, según sea el caso, su dirección postal y su dirección de correo electrónico.

Compromiso de Integridad. El envío de un manuscrito conlleva un compromiso por parte de su(s) autor(es) de que (1) no ha sido publicado anteriormente, (2) no ha sido enviado a otra revista, (3) su publicación ha sido aprobada por todos los co-autores, y (4) tiene autorización para utilizar todo material protegido por derechos de autor que contenga.

Toda correspondencia deberá estar dirigida a:

PRO MATHEMATICA:
Pontificia Universidad Católica del Perú
Departamento de Ciencias
Apartado 1761
Lima 100, Perú
Correo electrónico: promathematica@pucp.edu.pe

INFORMATION FOR AUTHORS

The journal PRO MATHEMATICA publishes papers from all areas of mathematics. We welcome papers presenting original research results as well as expository/survey articles. Papers from other sciences may be accepted provided they present interesting mathematical results.

Editorial Procedure. Please submit your original manuscripts via e-mail as PDFfiles. For papers written by more than one author, please mention which of them is to receive the correspondence. All papers received for possible publication in PRO MATHEMATICA are refereed. When a contribution is accepted, the authors will be requested to submit an electronic version of their manuscript in \TeX format, preferably in \LaTeX . In this case, the manuscript will be edited according to the style of the journal and authors will be requested to read the galley proofs carefully. Once an article is published, the corresponding author will receive an issue of the journal as well as an electronic version of their paper.

Manuscript Preparation. Manuscripts should be written in Spanish or in English, and must include a full title and an abbreviated title, a short abstract, a list of keywords, and the Mathematics Subject Classification code(s) of the most recent classification system (currently MSC 2020). Please, you provide your abstract and list of keywords in both languages: Spanish and English. The bibliographical references should include only works that are cited in the text, and must be ordered alphabetically as suggested by the AMS (www.ams.org/journals). If the paper contains any graphical materials, they should be included in EPS, JPG or PDF format. Figures and Tables should be identified by means of Arabic numerals or letters between parentheses. Legends should be brief and self-explanatory. Each author must include their current affiliation(s), mailing address and e-mail address.

Statement of integrity. The submission of a manuscript carries with it the author's assurance that (1) it has not been published elsewhere, (2) it is not under consideration for publication in other journals, (3) its publication has been approved by all coauthors, and (4) permission has been obtained for any copyrighted material used in it.

All correspondence should be addressed to:

PRO MATHEMATICA:
Pontificia Universidad Católica del Perú
Departamento de Ciencias
Apartado 1761
Lima 100, Perú
Correo electrónico: promathematica@pucp.edu.pe